

SERIE A, N° 4193

N° D'ORDRE : 5044

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

JEAN DUBOC

Agrégé de l'Université

1^{ère} THESE - PRODUCTION DES ETATS RESONANTS DANS LA REACTION

$K^+ + p \rightarrow K^0 + \pi^+ + p$

à 1,14 GeV/c

Soutenues le 12 Décembre 1963 devant la Commission d'Examen

MM. F. PERRIN

J. TEILLAC

A. BERTHELOT

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

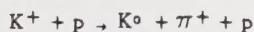
LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

JEAN DUBOC

Agrégé de l'Université

1^{ère} THESE - PRODUCTION DES ETATS RESONANTS DANS LA REACTION



à 1,14 GeV/c

Soutenues le 12 Décembre 1963 devant la Commission d'Examen

MM. F. PERRIN

J. TEILLAC

A. BERTHELOT



PROFESSEURS

DOYEN.....M. ZAMANSKY

G. JULIA	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparée
GRASSE	T Evolution des êtres organisés
PREVOST	T Chimie organique
WYART	T Minéralo et Cristallo
TEISSIER	T Zoologie
MANGENOT	T Biologie Vég. (Orsay)
AUGER	T Physique quantique et Relativité
MONNIER	T Physiologie Générale
PIVETEAU	T Paléontologie
ROCARD	T Physique (E.N.S.)
CARTAN	T Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T Chimie générale
FAVARD	T Géométrie supérieure
COULOMB	T physique du Globe
Mle COUSIN	T Biologie Animale (SPCN)
CHRETIEN	T Chimie minérale
DRACH	T Zoologie
KASTLER	T Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T Génétique
RIVIERE	T Géologie SPCN & Sédim.
GAUTHERET	T Biologie Vég. (PCB)
LUCAS R.	T Recherches Physiques
THOMAS A.	T Biologie cellulaire
ARNULF	T Optique appliquée
MORAND	T Physique Enseignement
SOLEILLET	T Physique (P.C.B.)
FORTIER	T Mécanique Exp. des Fluides
DANJON	T Astronomie
PETIT	T Biologie maritime
QUENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T Embryologie
EICHHORN	T Botanique
DE CUGNAC	T Biologie Vég. (SPCN)
Mle CAUCHOIS	T Chimie Physique
THELLIER	T Physique du Globe
L'HERITIER	T Biologie Gén. (Orsay)
GRIVET	T Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T Mécanique Générale
DUBREIL	T Arithm. & Théorie des Nombres
QUELET	T Chimie Organique
CAGNIARD	T Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T Micropaléontologie
JUNG	T Pétrographie
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T Chimie organique & struc.
JACQUINOT	T Spectroscopie et Physique céleste (Orsay)
VASSY	T Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T Théories Physiques
AMIEL	T Chimie générale
HOCART	T Minéralogie et Cristallo
J.P. MATHIEU	T Physique Optique
COUTEAUX	T Géologie
MAY	T Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T Théorie des fonctions et Topologie

FELDMANN	T <i>Biologie Végét. marine</i>
GUINIER	T <i>Physique des Solides (Orsay)</i>
JOST	T <i>Physiologie comparée</i>
FORTET	T <i>Calcul des Probabilités et Physique mathématique</i>
SCHARTZ	T <i>Calcul diff. et Intégral</i>
CHOUARD	T <i>Physiologie végétale</i>
MALAVARD	T <i>Aviation (Techn. Aéronaut.</i>
BRELOT	T <i>Calcul diff. et Intégral</i>
NORMANT	T <i>Chimie organique</i>
BENARD	T <i>Chimie Minérale</i>
BUVAT	T <i>Botanique (E.N.S.)</i>
DUGUE	T <i>Statistiques Mathématiques</i>
SOULAIRAC	T <i>Psychophysiologie</i>
ULRICH	T <i>Physiologie végétale</i>
MARECHAL	T <i>Optique théori. & appliq.</i>
KIRRMANN	T <i>Théories Chimiques</i>
CHADEFAUD	T <i>Botanique</i>
M ^{lle} LE BRETON	T <i>Physio. de la nutrition</i>
LELONG	T <i>Application de l'analyse à la géométrie</i>
DEVILLERS	T <i>Anatomie et Histol. Comp.</i>
EHRESMANN	T <i>Topologie Algébrique</i>
FRANCON	T <i>Physique (SPCN)</i>
GUANGEAUD	T <i>Géographie Phys. & Géol. dynamique</i>
GODEMENT	T <i>Mathématiques (M.P.C.)</i>
PISOT	T <i>Tech. Mathém. de la Phys.</i>
ROCH	T <i>Géologie</i>
SCHATZMAN	T <i>Astrophysique</i>
TERMIER	T <i>Paléontologie stratig.</i>
ZAMANSKY	T <i>Mathématiques générales</i>
LENNUIER	T <i>Physique (M.G.P.)</i>
RIZET	T <i>Génétique</i>
ROUTHIER	T <i>Géologie appliquée</i>
M ^{me} TONNELAT	T <i>Physique théorique</i>
DIXMIER	T <i>Mathématiques (MPC)</i>
SOUCHAY	T <i>Chimie générale</i>
AIGRAIN	T <i>Electrotechnique géné.</i>
BRUSSET	T <i>Chimie systématique</i>
M. LEVY	T <i>Physique théorique des hautes énergies (Orsay)</i>
M ^{me} CHAIX	T <i>Chimie biologique</i>
M ^{me} HUREL-PY	T <i>Biologie végétale (P.C.B)</i>
PIAUX	T <i>Chimie (M.P.C.)</i>
BRUN	T <i>Mécanique théorique des Fluides</i>
LEDERER	T <i>Chimie biologique</i>
M ^{me} DUBREIL	T <i>Mathématique (Agrég)</i>
M ^{me} LELONG	T <i>Mathématiques II (ENS)</i>
BELLAIR	T <i>Géologie (SPCN)</i>
COTTE	T <i>Physique électricité</i>
DUBOIS J.E.	T <i>Chimie organique</i>
LAMOTTE	T <i>Zoologie (ENS)</i>
MICHEL A.	T <i>Chimie minérale (Orsay)</i>
OLMER	T <i>Energétique générale</i>
ROUAULT	T <i>Electricité (Orsay)</i>
GAUTHIER	T <i>Mécanique appliquée</i>
BARCHEWITZ	T <i>Chimie Physique</i>
BROSSEL	T <i>Physique atomique</i>
BUSER	T <i>Physiologie comparée</i>
CAMUS	T <i>Physiol. Végétale BMPV</i>
CASTAING	T <i>Physique II Thermod. Orsay</i>
CURIEN	T <i>Minéralo. & Cristallog</i>
MOYSE	T <i>Physiologie végét. Orsay</i>
NOIROT	T <i>Evolution des êtres Org.</i>

PANNETIER
POSSOMPES
PULLMANN
TEILLAC
TONNELAT
VILLE
WILLEMART
DODE
FREYMAN
GUINOCHET
ROLLET
Mlle JOSIEN
CHEVALLEY
ARNOULT
CHAPELLE
DELANGE
DENY
GERMAIN
LUCAS G.
ALLARD
BERTHELOT
BRICART
Mme ALBE-FESSARD
FRIEDEL
FRIEDEL
M. JULIA

LENDER
MAGAT
Mlle QUINTIN
MONOD
BENOIT
DE POSSEL
CHARLOT
LEMEE
GUERIN
CHATELET
JEAN
MATTIER
BERGERARD
BERTEIN
BOUSSIÈRES
Mme COUTURE
ELLENBERGER
FRANC
SCHNELL
STOLKOWSKI
ACHER
BAUDOIN
BEAUMONT
BLAMONT
BOURREAU
CURIE D.
DURAND-DELGA
FREON
HELLER
TORTRAT
CAILLEUX
MAGNAN
DAUDEL

Mlle FOURCROY
Mme CHOQUET-BRUHAT
Mlle VEIL

T Chimie générale
T Zoologie
T Chimie quantique
T Physique Nucl. et Radio-activité
T Biologie Physico-chim
T Econométrie
T Chimie (P.C.B.)
T Chimie' (Orsay)
T Recherches Physiques
T Biol. Vég. SPCN (Orsay)
T Chimie minérale
T Chimie SPCN
T Géométrie algéb. et théorie des groupes
T Electronique (Orsay)
T Physique (Orsay)
T Mathématiques I (Orsay)
T Mathématiques Génér. Orsay
T Mécanique théor. des fluides
T Géologie
T Chimie Physique
T Phys. des particules Fond.
T Météor. et Phys. de l'atmosphère
T Physicophysiologie
T Physiques Solides
T (Orsay)
T Etudes des Moléculaires naturelles complexes
T Biologie Anim. SPCN Orsay
T Physico-Chimie des radio-éléments
T Electrochimie
T Chimie du métabolisme
T Physiol. anim. (Orsay)
T Analyse numérique
T Chimie analytique
T Physiol. Vég. BMPV (Orsay)
T Chimie MPC (Orsay)
T Chimie PCB
T Physique Nucléaire Orsay
T Physique SPCN
T Zoologie (Orsay)
T Electronique (Orsay)
T Chimie des radio-éléments (Orsay)
T Thermodynamique et Méc. Physique
T Géologie des grandes régions du globe
T Biologie animale PCB
T Botanique tropicale (Orsay)
T Physiologie végétale
T Chimie Biol. (Orsay)
T Biologie animale PCB
T Biologie animale SPCN
T Géophysique ionosphère
T Botanique
T Physique MGP
T Géologie
T Chimie organique (Orsay)
T Physiolog. végétale
T Calcul des Probabilités
T Géologie (SPCN)
T Physique SPCN
T Mécanique ondulatoire appliq. à la chimie Théorique & à la Phy. Nucléaire.
T Biologie Végétale SPCN
T Méc. Analytique et méca. céleste.
T Physiologie Générale

LWOFF	Microbiologie
SIESTRUNCK	T Mécan. Phys. & Expérim.
LACOMBE	T Métallurg. des métaux Nucléaires
BROCHARD	T Physique PCB (Orsay)
CABANNES	T Mécanique générale
LESIEUR	T Mathématiques I (Orsay)
MAZET	T Mécanique générale (Orsay)
CAIRE	Géographie phys. et Géolog. Dynamique
COMOLET	T Mécanique des fluides
CORABOEUF	Physiologie animale Orsay
DELLOUE	Physique de l'exosphère
GORENFLOT	Botanique II (Orsay)
HOUILLON	Biologie animale PCB
JULLIEN J.	T Chimie SPCN (Orsay)
MALGRANGE	T Technique Math. de la Physique (Orsay)
OLIVIER	Antropologie
NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
BLANC-LAPIERRE	T Physique ENS (Orsay)
CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay)
KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
SAMUEI	T Mathémat. ENS féminines
KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay)
THIRY	T Mécanique céleste
ABELES	Physique SPSCN
AMAT	Physique PCB
AUBOIN	Géologie
Mme BENOIT-GUEUTAL	Physique Nucl. et radioactivité
BOUGIS	Biologie marine (Ville-franche/mer)
BRUHAT	Mathématiques MPC
BRUNN	T Géologie historique (Orsay)
CHABBAL	Physique MGP (Orsay)
DEHEUVELS	T Mathématiques Propé (Orsay)
D'ESPAGNAT	Physique théorique (Orsay)
FURON	Géologie SPCN
Mme GANS	T Génétique
GENEVES	Biologie végétale PCB
GUILBERT	Physique (CUS Orléans)
HUPE	Pétrographie
HOLLANDE	T Biologie générale
LIONS	T Analyse numérique
MAITRE	Chimie PCB
MEYER	Physique propédeutique
NICOLAS	Géologie appliquée
PANIGEL	Biologie générale
RAVIER	Pétrographie
ROSEAU	T Mécanique théor. des Fluides
ROUBINE	Electronique
SILBER	T Chimie P.C.B.
UEBERSFELD	T Electronique
YVON	T Théories Physiques.

Le Secrétaire Général :
R. POUILLAIN.

TABLE DES MATIERES

	Pages
I. Introduction.	5
II. Conditions expérimentales.	8
1. Prise des photographies.	8
2. Dépouillement et analyse.	8
III. Sections efficaces.	13
1. Définition, méthode de mesure.	13
2. Mesure de la longueur de désintégration.	13
3. Mesure du nombre d'interactions inélastiques.	14
4. Mesure du nombre de désintégrations.	16
5. Section efficace et précision du résultat.	18
a - Précision sur la mesure de la section efficace.	18
b - Résultat.	19
6. Test de cohérence.	19
a - Homogénéité du dépouillement.	19
b - Vérification de la répartition angulaire.	21
7. Section efficace à 0,98 GeV/c.	21
8. Calcul des corrections des nombres d'interactions et de désintégrations.	25
a - Correction due au vol des V^0 courts.	
b - Correction due au parcours potentiel des V^0 .	27
c - Calcul de la répartition angulaire théorique de désintégration.	29
IV. Poids statistiques des événements.	33
1. Définition - principes de la méthode.	33
2. Test sur σ^2	35
3. Choix de la η coupure.	37
4. Test sur σ^2_x	38

V. Etude de l'interaction K^+p.	40
1. Diagramme de Dalitz.	40
2. Obtention d'une résonance pure.	40
3. Analyse de la résonance N^*	47
4. Résultats de l'analyse du N^*	50
5. Etude du diagramme de Dalitz.	55
a - analyse du K^*	55
b - analyse du K^{*730}	57
c - présence de la résonance $K\rho$.	60
VI. Remarques.	62
1. Validité de l'opération de conjugaison.	62
2. Absence de fond.	62
VII. Conclusions.	
Tables.	64
Annexes.	65
1. Calcul de la section efficace.	69
2. Méthodes statistiques.	70
3. Techniques des invariants.	90
4. Méthode pour reconstituer une résonance pure.	93

A ma femme,

I. INTRODUCTION

L'expérience qui fait l'objet de ce travail a pour but d'étudier l'interaction inélastique avec échange de charge des mésons K^+ et des protons, selon la réaction : 1,2.



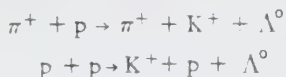
Nous essayons de mettre en évidence et de mesurer les sections efficaces de production des trois résonnances possibles $p \pi$ ou N^* de masse 1238 MeV, $K\pi$ ou K^* de masses 730 et 888 MeV.

L'impulsion moyenne des mésons K^+ incidents est de 1,141 GeV/c ce qui correspond à une énergie totale dans le système du centre de masse (s.c.m.) $K^+ p$ de 1,859 GeV.

L'utilisation d'une chambre à bulles nous a paru favorable pour plusieurs raisons.

La première est la parfaite signature des événements : le K^0 produit, s'il s'agit d'un K_L^0 , a un temps de vie de 10^{-10} s, et a par conséquent une forte probabilité de se désintégrer dans la chambre. Son mode visible le plus fréquent est une désintégration en 2 mésons π et l'interaction apparaît comme un événement à deux branches additionné d'un V neutre ($2B V^0$). Cette configuration, parfaitement identifiable au dépouillement (fig. 1), a été détectée avec une très bonne efficacité.

La seconde est que la contamination du faisceau de mésons K^+ incidents en mésons π^+ et en protons ne crée pas d'erreurs systématiques dans l'étude cinématique de la réaction ; en effet les réactions πp ou pp ne peuvent conduire à une configuration analogue à notre énergie, il faudrait pour y parvenir, invoquer des réactions du type :



dont les seuils d'impulsion respectifs sont 1,142 et 2,34 GeV/c. La dispersion d'impulsion du faisceau est telle que la première réaction est possible mais avec un espace de phase très petit. En conséquence, presque tous les événements mesurés appartiendront à la réaction étudiée.

La troisième est que nous étions en présence des conditions nécessaires pour une bonne analyse cinématique, toutes les particules produites laissent des traces dans la chambre et à l'énergie choisie toutes les impulsions sont suffisamment faibles (200 à 800 MeV/c) pour que les trajectoires soient bien courbées par l'induction magnétique.

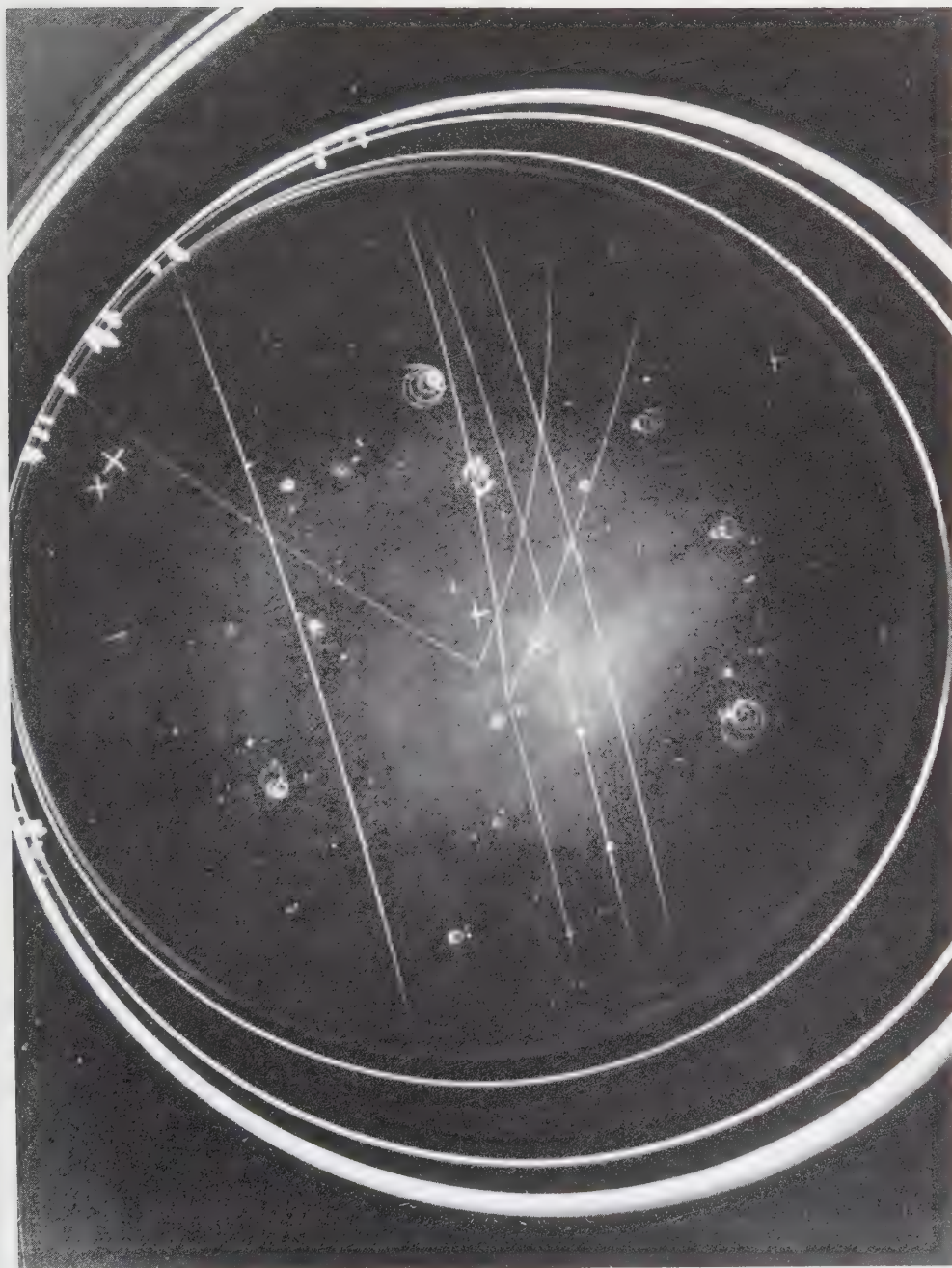
Nous présentons dans la table n°1 une liste des seuils des réactions $K^+ p$ possibles qui présentent la même signature $2B V^0$ dans la chambre à bulles.

L'énergie choisie est au-dessus du seuil de création du K^* mais au dessous du seuil de création simultanée $K^* + N^*$; par contre la possibilité d'obtenir un et même deux mésons π^0 supplémentaires n'est pas exclue.



FIGURE 1

EVENEMENT $2BV^0$



II. CONDITIONS EXPERIMENTALES

1) Prise des photographies

L'expérience a été effectuée auprès du synchrotron à protons Saturne du Centre d'Etudes Nucléaires de Sarclay. Le faisceau de mésons K^+ incidents est constitué essentiellement d'un aimant déflecteur et d'un étage de séparation avant la fente de masse, placée à 20 mètres de la cible (fig. 2). Les caractéristiques de ce faisceau ont été mesurées par une expérience d'électronique³. Après la fente de masse nous avons ajouté un autre aimant déflecteur pour obtenir une seconde analyse en impulsion et une lentille quadrupolaire pour présenter correctement les particules dans la chambre. Nous avons utilisé la chambre à bulles à hydrogène liquide de 35 cm du L.P.C.H.F. Nous avons pris 74 films soit environ 230.000 clichés en réglant l'impulsion initiale des mésons K^+ à 1,14 GeV/c et 25 films soit 80.000 clichés en la réglant à 0,98 GeV/c.

2) Dépouillement et Analyse

Chaque photographie présente 7 à 8 traces dont la répartition moyenne (3 protons, un méson π , deux mésons μ et 1,5 mésons K^+) correspond à une intensité de 2 à $3 \cdot 10^{10}$ protons dans la machine, intensité nominale au cours de l'hiver 1962.

Pour mesurer la section efficace, il est nécessaire de connaître le flux de mésons K^+ incidents. La pollution du faisceau étant trop importante pour déterminer ce flux par un nombre moyen de traces dans la chambre, nous avons préféré déduire le nombre de K^+ incidents du nombre de désintégrations observées. Si nous rappelons ici les différents modes de désintégrations des K^+ et leurs rapports d'embranchement⁴.

Particules secondaires	Mode de désintégration	Rapport d'embranchement
$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$	$K\mu_2$	58,8 soit x
$\pi^+ + \pi^0$	$K\pi_2$	25,6 soit y
$e^+ + \nu + \pi^0$	Ke_3	4,2
$\mu^+ + \nu + \pi^0$	$K\mu_3$	4
$\pi^+ + \pi^0 + \pi^0$	$K\pi_3$	1,7
$\pi^+ + \pi^+ + \pi^0$	$K\pi_3 (\tau)$	5,6

nous remarquons que :

a) Le mode $K\mu_2$ le plus fréquent apparaît comme un évènement à une branche, donc comme une cassure dans la trajectoire du K^+ incident. Il peut arriver, si le méson μ a été mis vers l'arrière dans le système du centre de masse du K^+ , qu'il donne une trace assez courte dans le système du laboratoire et se désintègre ensuite en $e^+ + \nu + \bar{\nu}$. Ce type d'évènement ne peut cependant être confondu avec la désintégration

FAISCEAU

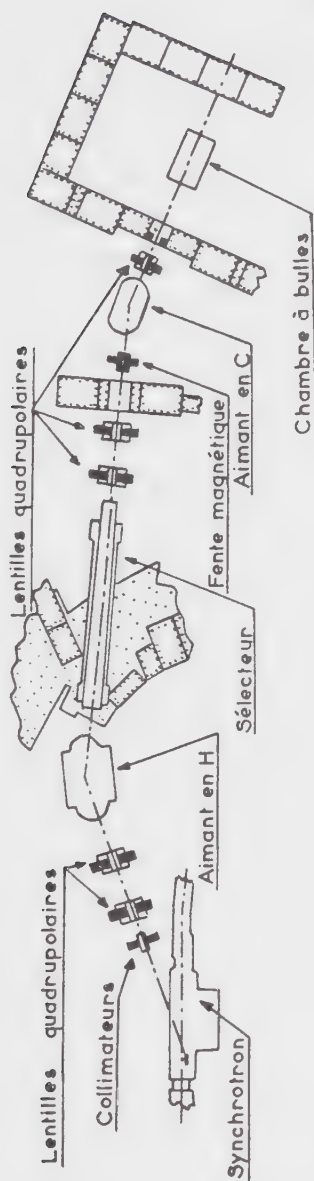


FIGURE 2

d'un méson π^+ selon le schéma :

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu \\ &\hookrightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}\end{aligned}$$

car cette dernière désintégration n'est en fait visible que si le méson π est assez lent. Dans ce cas, la longueur de la trajectoire du méson μ est une constante bien connue et la trace du méson π qui lui donne naissance a des caractéristiques telles (ionisation, courbure) qu'elle ne peut être confondue avec les traces des mésons K^+ qui se désintègrent en vol.

b) Le mode $K\pi_2$ dans le cas général est indiscernable au dépouillement du mode $K\mu_2$, mais nous avons pu quelquefois identifier toutes les étapes de désintégration.

c) Le mode $K\pi_3$ ou mode τ par contre est parfaitement reconnaissable comme un événement à 3 branches dont deux sont positives et l'autre négative.

Les autres modes de désintégrations sont plus rares et indiscernables des 2 types précédents (1 branche ou 3 branches). Parfois, l'examen de l'ionisation ou la modification de la courbure ont permis d'identifier des événements K_{e3} .

Pour améliorer l'efficacité du dépouillement nous avons déterminé un volume utile en dessinant sur la table de projection une grille centrée sur les marques tracées sur les parois de la chambre, représentant la chambre à mi-épaisseur et divisant la longueur en 10 ; et nous avons compté dans chaque zone le nombre de désintégrations et d'interactions trouvées sur un échantillonnage de 20.000 photographies. Nous avons testé par la méthode au chi carré l'homogénéité du dépouillement et nous avons été ainsi conduit à définir un volume utile. Dans l'espace, ce volume est limité par un tronc de cône dont le sommet est le centre optique de la caméra du haut ; et dont la section, par un plan situé au milieu de la chambre, est composée de deux arcs de cercle de 12 cm de rayon comme limites avant et arrière, et de deux arcs de cercles qui s'appuient sur les bords de la fenêtre mince et qui sont parallèles à la trajectoire moyenne du faisceau comme limites haut et bas (fig. 3).

Ce dépouillement a été effectué deux fois en parallèle à Paris et au département Synchrotron Saturne du C.E.N. de Saclay.

En septembre 1962, nous avons pu analyser l'ensemble des événements du type $2B V^0$ avec le programme de cinématique GRIND⁵ passant sur la machine IBM 7090 du C.E.N. de Saclay.

Des différentes hypothèses possibles 1, 2, 3 et 4 de la table 1, nous avons rejeté toutes celles qui ont conduit à une probabilité inférieure à 0,4%. Tous les événements retenus sont compatibles avec la

seule hypothèse n° 1, à l'exclusion des hypothèses 2, 3 ou 4. Il semble donc que, dans cette réaction inélastique, il n'y ait pas création de mésons π^0 supplémentaires bien que ce soit énergétiquement possible*, et ce résultat remarquable est à rapprocher de la même conclusion tirée de l'expérience de diffusion inélastique K^+p^- effectuée à la même énergie.

L'énergie excédentaire apparaît d'une manière préférentielle comme une énergie d'interaction entre les états résonants plutôt qu'en mésons π^0 supplémentaires. La seule ambiguïté rencontrée est l'identification par le programme des deux branches de l'apex, (π^+ ou p) lorsque les impulsions des deux particules sont voisines. Heureusement dans ce cas la densité d'ionisation due au proton est beaucoup plus importante que celle due au π^+ et l'examen direct de la photographie a permis chaque fois de lever l'ambiguïté.

Comme la chambre était petite, nous avons pris un volume utile assez grand pour ne pas perdre trop d'événements. En conséquence un certain nombre d'entre eux associés à des traces courtes ou pâles ont été difficiles à analyser, certaines valeurs mesurées relatives au proton incident entachées de trop larges erreurs ont dû être éliminées et remplacées par des valeurs "forfaitaires", en particulier l'angle azimutal et l'angle de site à l'entrée dans la chambre. Ces valeurs forfaitaires sont les valeurs moyennes correspondant aux événements bien mesurés.

Pour étudier la validité des analyses, nous avons vérifié la conservation de la parité lors de l'interaction de la manière suivante ** : des cinq quadrivecteurs impulsions énergie qui décrivent l'interaction, quatre seulement sont indépendants, par exemple celui du proton initial et ceux des trois particules finales. Dans le système du laboratoire le premier n'a pas de composantes spatiales et nous pouvons construire avec les impulsions des trois autres le pseudo-scalaire $K^0 \wedge \pi. P_f$ (voir notation annexe III) dont le signe positif ou négatif est lié à l'orientation droite ou gauche du trièdre formé par ces trois impulsions. Comme la parité est conservée, si nos résultats sont corrects nous devons trouver autant de pseudo-scalaires d'un signe que de l'autre, en fait, nous trouvons 115 trièdres $K^0 \pi p$ droits et 91 gauches, ce qui vérifie l'hypothèse à 1,5 écarts près.

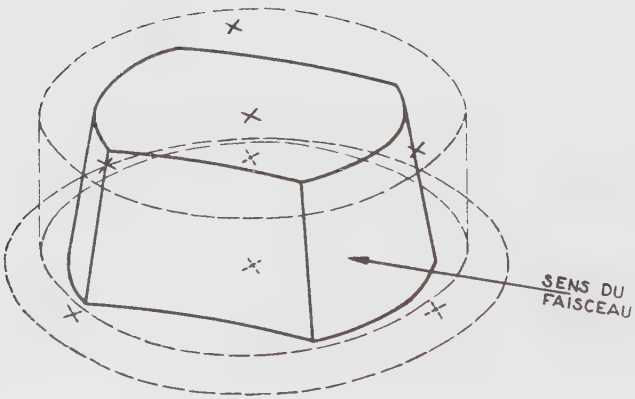
* Résultat d'une analyse minutieuse faite par MM. Duong et Pripstein.

** Ce calcul a été fait par F. Levy.

FIGURE 3

VOLUME UTILE

CAMERA DU HAUT



III. SECTIONS EFFICACES.

1) Définition, méthode de mesure.

Lors de la traversée de la chambre le nombre de K^+ du faisceau diminue pour trois raisons :

- les interactions inélastiques avec échange de charge.
- les autres modes d'interactions.
- les désintégrations.

Si ν est le nombre d'interactions inélastiques avec échange de charge produites dans l'expérience, K le nombre de désintégrations et L_D la longueur de désintégration des mésons K^+ , la section efficace de la réaction est donnée par la formule : (voir annexe 1).

$$\sigma = \frac{282}{L_D} \frac{\nu}{K} \quad (1)$$

Pour mesurer cette section efficace nous avons compté à l'intérieur du volume utile les désintégrations et les interactions inélastiques avec échange de charge. L'interaction se produit lors du choc K^+p , donc à l'apex, le V^0 ne sert que de signature de l'événement et nous avons relevé tous les événements dont l'apex est situé dans le volume.

2) Mesure de la longueur de désintégration.

Par définition :

$$L_D = c \tau_0 \frac{pc}{m_0 c^2} \quad (2)$$

formule dans laquelle p est l'impulsion du K^+ , τ_0 sa vie moyenne m_0 sa masse au repos.

Pour avoir une mesure de l'impulsion du faisceau plus précise que celle donnée par la méthode du fil flottant nous avons fait un histogramme des impulsions initiales données par la sortie du programme GRIND, et nous avons adapté la courbe de Gauss :

$$\pi p = A e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{p - p_0}{\Delta p} \right)^2} \quad (3)$$

à l'histogramme en optimisant les paramètres A , p_0 et Δp selon la méthode décrite en annexe II, chap. III.

Les résultats numériques conduisent à l'impulsion moyenne $p_0 = 1,141 \text{ GeV}/c$ associée à la dispersion $\Delta p = 0,027 \text{ GeV}/c$

($\chi^2 = 10$ pour une espérance mathématique de 9) (Fig. 4).

En prenant pour temps de vie du K^+ la valeur ⁴

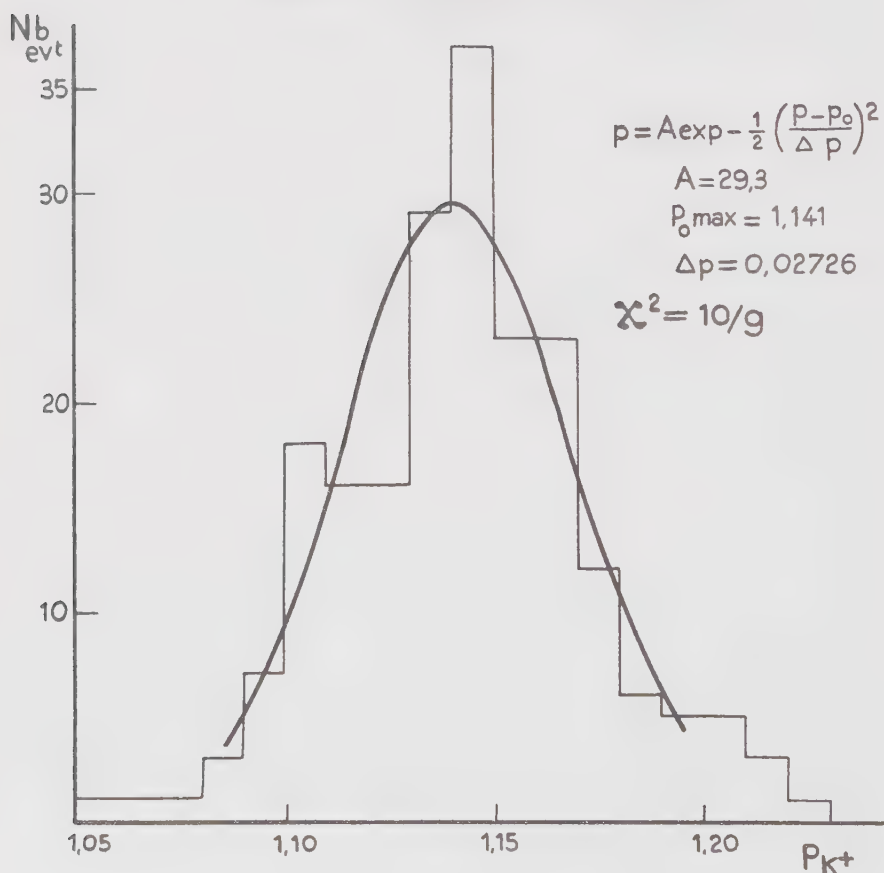
$$\tau_0 = (1,224 \pm 0,013) 10^{-8} \text{ s.}$$

et pour l'impulsion moyenne $p = 1,14 \text{ GeV/c}$

nous obtenons une longueur de désintégration de 8,48 m.

FIGURE 4

SPECTRE D'IMPULSION DES K^+ INCIDENTS



3) Mesure du nombre d'interactions inélastiques avec échange de charge.

L'interaction K^+p lors de l'échange de charge peut donner naissance avec une égale probabilité soit à un K_1^0 de temps de vie 10^{-10} s , soit, à un K_2^0 de temps de vie $6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Le K_2^0 a très peu de chance de se désintégrer dans la chambre car son temps de vie est trop long et le K_1^0 peut se désintégrer : en $\pi^+ + \pi$ avec la probabilité $2/3$ ou en

$\pi^0 + \pi^0$ avec la probabilité $1/3$. Le passage des particules neutres dans la chambre ne laissant pas de traces seul le premier mode de désintégration en $\pi^+ + \pi^-$ est visible sous forme de V^0 . Par conséquent, de tous les K^0 produits, un tiers seulement peut être détecté.

Nous avons trouvé dans les 74 films dépouillés 259 événements du type $2BV^0$ dont l'apex est situé dans le volume utile. Pour 240 d'entre eux, l'apex et le vertex sont à la fois dans le volume utile, mais 227 seulement ont été mesurés. Il a fallu en exclure 11 vus seulement par deux caméras et 2 constitués de traces trop pâles.

De ces 227 événements 5 se sont révélés être de faux $2BV^0$ pour lesquels le programme n'a pas convergé, soit parce que la cinématique du K^0 seul a rejeté l'hypothèse K^0_1 , soit parce que le V^0 ne semblait pas associé aux deux branches de l'apex. Nous avons donc un premier facteur correctif pour tenir compte de ces rejets physique égal à $1 - 5/227 = 0,9780$.

Une seconde correction est nécessaire pour séparer les événements à vol de V^0 très court des réactions inélastiques à quatre branches $K^+ + p \rightarrow K^+ + p + \pi^+ + \pi^-$. Pour lever cette indétermination nous avons cherché le plateau de la fonction :

$$P = \sum e^{-\frac{dm_0}{p \cos \delta c} \tau_0} \quad (4)$$

(chap. III § 8) et avec les 218 événements utilisés pour cette étude le maximum de la courbe est situé à 223, ce qui conduit à un facteur correctif de 1,0230.

Une troisième correction tient compte de l'efficacité de détection du V^0 dans la chambre. Pour chaque événement analysé nous avons calculé sa probabilité de détection, qui est :

$$P = 1 - e^{-\frac{L m_0}{c \tau_0 p_0}} \quad (5)$$

L étant le parcours potentiel du V^0 dans la chambre, le poids de chacun est égal à l'inverse de cette probabilité de détection et le poids moyen est de 1,0162.

Enfin, nous devons calculer l'efficacité de dépouillement. Pour cela nous avons comparé les résultats des deux dépouillements successifs et examiné soigneusement toutes les différences. Le pourcentage de perte du premier dépouillement par rapport au second est de 5,8% et du second par rapport au premier de 8,1%. Le taux de perte après les deux dépouillements est égal au produit des facteurs précédents au premier ordre, et la correction à apporter de 1,0047.

Le facteur correctif total est le produit de ces quatre facteurs soit 1,0219, et le nombre d'événements 2BVo à retenir pour le calcul de la section efficace est :

$$\nu_1 = 264,67$$

L'étude des résultats cinématiques montre qu'aucun des événements retenus n'est compatible avec la création d'un K_2^0 au lieu d'un K_1^0 (dans ce cas la balance d'impulsion de V^0 n'aurait pas été correcte) ; et nous n'avons pas non plus d'événement avec création d'un π^0 supplémentaire. Le nombre total de K^0 produits est donc le triple du nombre : 1 calculé, sans autres corrections,

4) Mesure du nombre de désintégrations.

Nous avons vu que les modes principaux de désintégration $K\mu_2$ et $K\pi_2$ de même que les modes plus rares de $K\pi_3$, $K\pi_1$ et $K\pi_0$ apparaissent comme des événements à 1 branche et en général ne peuvent être distingués les uns des autres.

Le comptage simple de ces désintégrations n'est pas réaliste, d'abord parce que l'efficacité de détection des brisures de trajectoires est faible aux petits angles et devient pratiquement nulle pour des angles de l'ordre de 2° , ensuite parce que nous risquons de les confondre avec les interactions sur proton donnant un faible recul. Pour un recul de 1mm, unité inférieure discernable, l'angle de déviation de la particule incidente est de 4° , aussi pour palier ces deux inconvénients, nous n'avons retenu que les événements dont l'angle de désintégration est supérieur à 5° en projection.

Plutôt que de calculer la correction sur la bande de 0 à 5° nous l'avons calculée sur toute la répartition angulaire en projection théorique pour les deux modes principaux $K\mu_2$ et $K\pi_2$. Ceci nous fournit, entre autre, les deux pourcentages de la bande 0- 5°

soit $\rho' = 21,672$ pour les $K\mu_2$

et $\rho'' = 23,866$ pour les $K\pi_2$

Nous avons relevé 4153 événements à 1 branche non identifiés et 35 reconnus comme étant des $K\pi_3$ soit un total de :

$$k_1 = 4188$$

Si l'on admet, comme hypothèse simplificatrice que tous les événements à 1 branche se désintègrent suivant une répartition angulaire peu différente du mélange $K\mu_2 + K\pi_2$, dans les proportions x et y de leur rapport d'embranchement, la répartition théorique dans une bande d'indice j est :

$$c_j = \frac{x\rho'_j + y\rho''_j}{x + y} \quad (6)$$

En prenant $x = 58,8$ et $y = 25,6$ (chap. 1) pour la bande $0-5^\circ$ nous obtenons le pourcentage de $\rho = 22,337\%$.

Comme pour les $2B\nu^0$ nous avons calculé l'efficacité de dépouillement de ce type d'événements. La perte au premier dépouillement étant de $5,35\%$ au second de $3,86\%$ nous obtenons le nombre correctif $e = 1,00212$.

Le nombre total d'événements à une branche de l'expérience est donc de :

$$k_2 = \frac{k_1 \cdot e \cdot 100}{100 - \rho} = 5403,88 \quad (7)$$

Nous avons noté aussi les désintégrations de K^+ en trois mésons π chargés (ou τ) dont la signature dans la chambre est caractéristique. Le nombre de τ observés est de $333,2$ ce qui, avec un facteur correctif dû à l'efficacité de dépouillement de $1,00379$, calculé comme les précédents, correspond à un nombre réel de $33,2$.

Nous avons vérifié que nous retrouvons le rapport d'embranchement du mode de désintégration τ .

Le rapport connu du nombre de τ au nombre d'événements à une branche est :

$$R = \frac{5,66}{100 - 5,66} = 0,0600$$

Les chiffres expérimentaux obtenus conduisent au rapport :

$$R = 0,0616$$

mais la précision du résultat est faible à cause du petit nombre τ car

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\tau}{\tau} = 0,055$$

soit :

$$0,058 < R < 0,065$$

Notre dépouillement est donc compatible avec les chiffres donnés par Barkas et Rosenfeld. ⁴ Nous déduisons le nombre total de K^+ de l'expérience :

$$K = \frac{k_2}{100 - 5,66} = 5728,09 \quad (8)$$

5) Section efficace et précision du résultat.

Ces valeurs de ν et de K nous permettent de calculer la section efficace totale d'échange de charge

$$\sigma = 4,61 \text{ mb}$$

a) Précision sur la mesure de la section efficace :

Différencions la formule (1) nous obtenons :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = - \frac{L_D}{L_D} + \frac{d\nu}{\nu} - \frac{dK}{K}$$

l'erreur sur L_D se calcule à partir de la formule (2)

$$\frac{dL_D}{L_D} = \frac{d\tau_0}{\tau_0} + \frac{dp}{p}$$

Les quantités du numérateur sont connues : $d\tau_0$ par les tables, et dp est assimilé à la mi-largeur de la courbe de Gauss des impulsions.

La précision sur le nombre ν est égale à la précision statistique sur ν_1

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{d\nu_1}{\nu_1} = \frac{1}{\sqrt{\nu_1}}$$

La précision sur K est plus délicate à évaluer :

à l'aide des formules 7 et 8 nous obtenons

$$\frac{dK}{K} = \frac{dk_2}{k_2} = \frac{dk_1}{k_1} - \frac{d(100 - \rho)}{100 - \rho} = \frac{dk_1}{k_1} + \frac{d\rho}{100 - \rho}$$

Le premier terme représente l'erreur statistique sur k_1 ; le second ρ est lié à l'impulsion du K^+ . Pour l'obtenir il faut connaître la variation du rapport théorique de désintégration dans la bande 0-5° en fonction de l'impulsion du faisceau. La formulation mathématique est exposée au paragraphe 8 c ; au lieu de différencier les formules, il est plus simple de faire calculer par la machine les rapports $\frac{\Delta \rho'}{\Delta \rho}$ et $\frac{\Delta \rho''}{\Delta \rho}$ pour deux impulsions voisines et d'en déduire

la formule (6) fournit $d\rho$:

$$d\rho = \left(\frac{x}{x+y} \frac{\Delta \rho'}{\Delta \rho} + \frac{y}{x+y} \frac{\Delta \rho''}{\Delta \rho} \right) d\rho$$

d'où la formule complète

$$\frac{d\sigma'}{\sigma} = - \frac{d\tau_0}{\tau_0} - \frac{dp}{p} + \frac{d\nu_1}{\nu_1} - \frac{dk_1}{k_1} - \frac{1}{100-\rho} \left[\frac{\Delta\rho_1'}{\Delta p} \frac{x}{x+y} + \frac{\Delta\rho_1''}{\Delta p} \frac{y}{x-y} \right] dp$$

Les deux termes en dp ne sont pas indépendants et en passant aux incertitudes absolues il vient :

$$\frac{\vec{\Delta}\sigma}{\sigma} = \frac{\vec{\Delta}\tau_0}{\tau_0} + \frac{\vec{\Delta}\nu_1}{\nu_1} + \frac{\vec{\Delta}k_1}{k_1} + \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{100-\rho} \left(\frac{\Delta\rho_1'}{\Delta p} \frac{x}{x+y} + \frac{\Delta\rho_1''}{\Delta p} \frac{y}{x-y} \right) \right] \Delta p$$

Le terme prépondérant est évidemment $\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1}$ à cause de la faible

statistique, les autres sont environ 5 fois plus petits.

Ces incertitudes étant indépendantes, l'incertitude sur la section efficace peut être calculée comme la racine de la somme des carrés des incertitudes partielles ce qui donne :

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = 0,0696 \sim 0,07$$

b) Résultat.

Après toutes ces corrections la section efficace d'interaction inélastique avec échange de charge K^+p est de :

$$\sigma = 4,6 \pm 0,3 \text{ mb.}$$

Cette mesure est tout à fait compatible avec des résultats préliminaires publiés antérieurement ⁶.

6) Test de cohérence.

a) Homogénéité du dépouillement

Nous pouvons contrôler par la méthode du χ^2 que la section efficace ne dépend pas de l'échantillonnage c'est-à-dire que le rapport $\frac{\nu_i}{k_1}$ du nombre de $2BV^0$ observé au nombre des événements à 1 branche est constant dans chaque film. Soit a ce rapport constant théorique.

Le χ^2 du dépouillement est (annexe II, Chap. VII)

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{a - \frac{\nu_i}{K_i}}{\Delta a_i} \right)^2 \quad \text{ce qui s'écrit} \quad \sum_i \left(\frac{a - \frac{\nu_i}{K_i}}{a} \right)^2 K_i$$

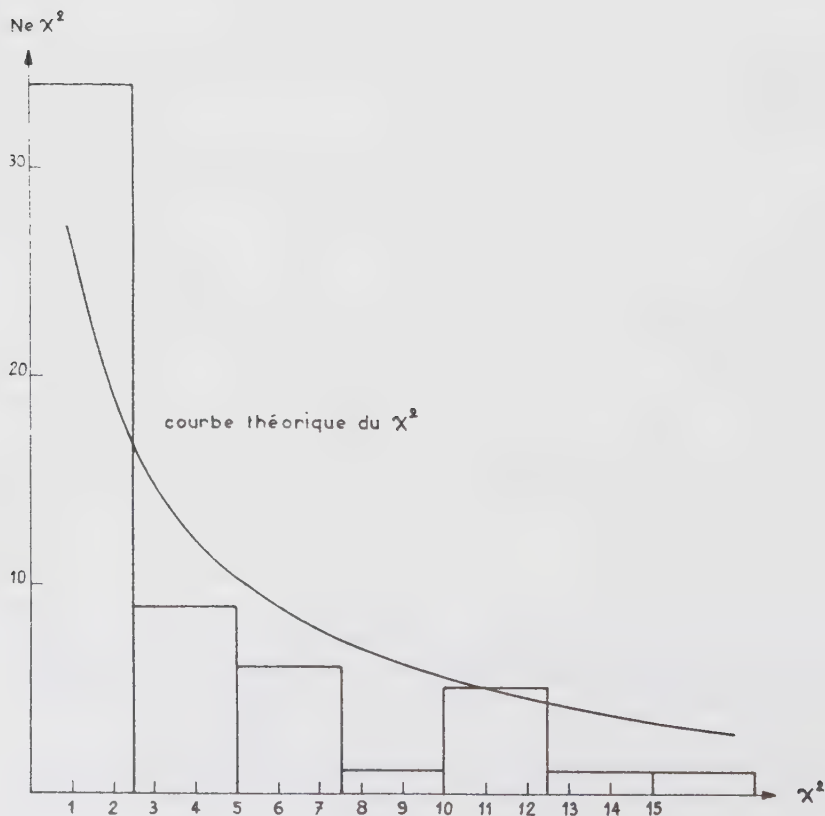
nous avons calculé par programme le χ^2 de chaque film et le χ^2 général.

Nous obtenons un χ^2 général de 69,6 pour une valeur attendue de 73 ce qui est un bon résultat, et nous avons tracé un histogramme en 7 bandes des χ^2 partiels et adapté la distribution attendue du χ^2 soit :

$$P = \frac{A}{\sqrt{\chi^2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

Le χ^2 de cette distribution de χ^2 est de 9 pour une espérance mathématique de 6, soit à moins d'un écart type ce qui est satisfaisant (Fig. 5).

HISTOGRAMME DES χ^2 DES RAPPORTS 2BV/K



Comme second test du dépouillement le même calcul a été effectué pour le rapport $\pi/1B$ et les résultats sont un peu moins bons : le χ^2 général atteint 90 pour la même valeur attendue de 73.

Ce résultat peut s'expliquer par l'application de nos dépouilleurs à la recherche des $2BV^0$, application qui s'est peut-être relâchée pour les autres types d'événements.

b) Vérification de la répartition angulaire.

Dans le cas des désintégrations à 1 branche, nous avons noté au dépouillement l'angle en projection du secondaire et du primaire. Cet angle a été évalué de façon assez grossière sur la projection conique associée à la caméra du haut. Nous avons tracé un histogramme des répartitions angulaires ainsi obtenues.

Nous avons adapté à cet histogramme la fonction : $y = A \rho_j$ (Fig.6) fonction tabulée dont les ρ_j sont les pourcentages théoriques calculés (Chap. III § 8 c).

Nous obtenons pour les 15 bandes angulaires testées un χ^2 de 24 pour une valeur attendue de 14, et si nous supprimons le test sur les deux dernières bandes $65-70^\circ$ et $70-75^\circ$ le χ^2 prend la valeur 17 pour une espérance mathématique de 12.

Ce dernier nombre prouve que nos résultats expérimentaux sont compatibles avec nos calculs à un écart près. L'exclusion des deux dernières bandes est due au fait que dans ce domaine angulaire la contribution de la désintégration $K\mu$ est faible alors que celle des autres modes de désintégration à une branche visible, mais en trois corps, K_e3 par exemple, est encore notable. La perturbation due au mélange est donc beaucoup plus sensible aux grands angles qu'aux petits.

Nous avons calculé aussi le χ^2 de cette répartition angulaire pour chaque film et nous avons fait un histogramme des résultats.

L'espérance mathématique de chacun est de 14 et nous obtenons un maximum bien situé entre 8 et 12 (Fig. 7).

7) Section efficace à $0,98 \text{ GeV}/c$,

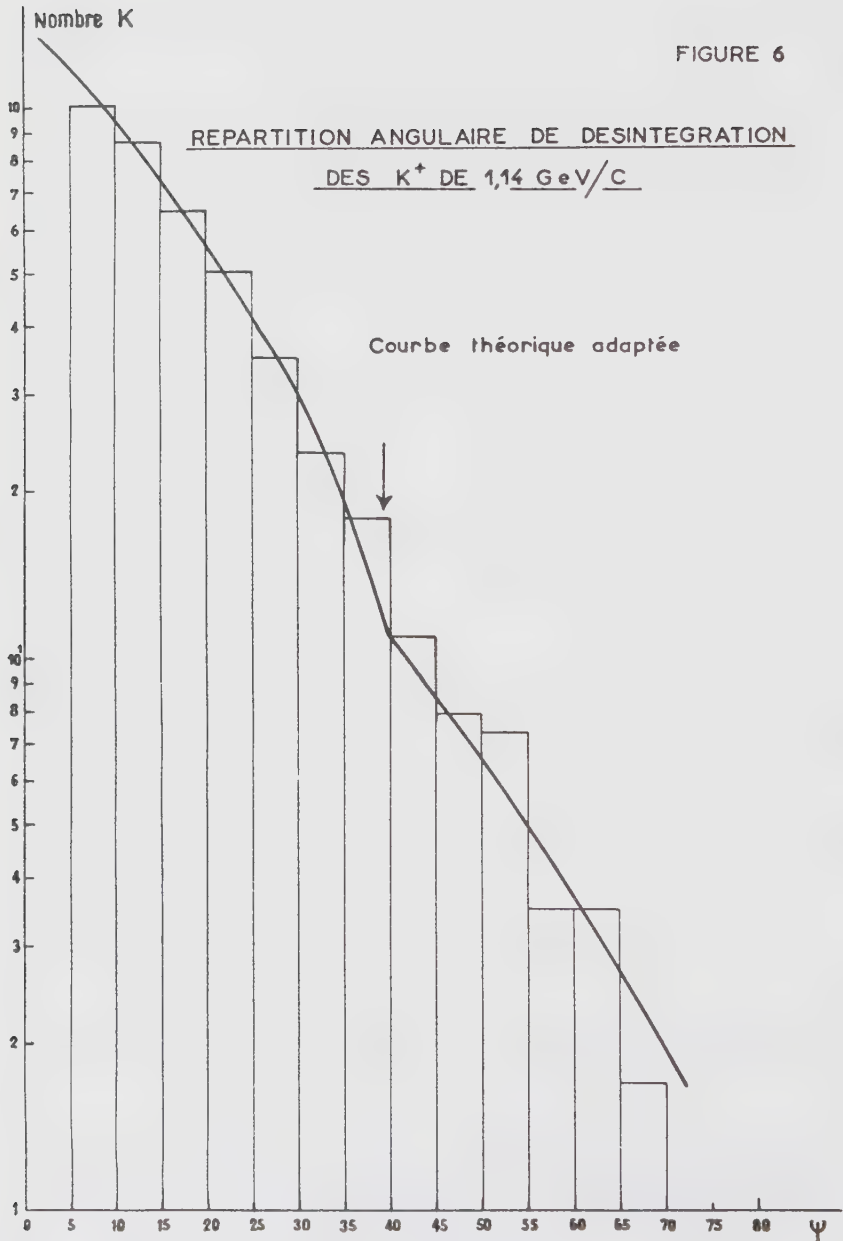
Nous avons procédé de la même façon que pour $1,141 \text{ GeV}/c$, mais avec une statistique beaucoup plus pauvre :

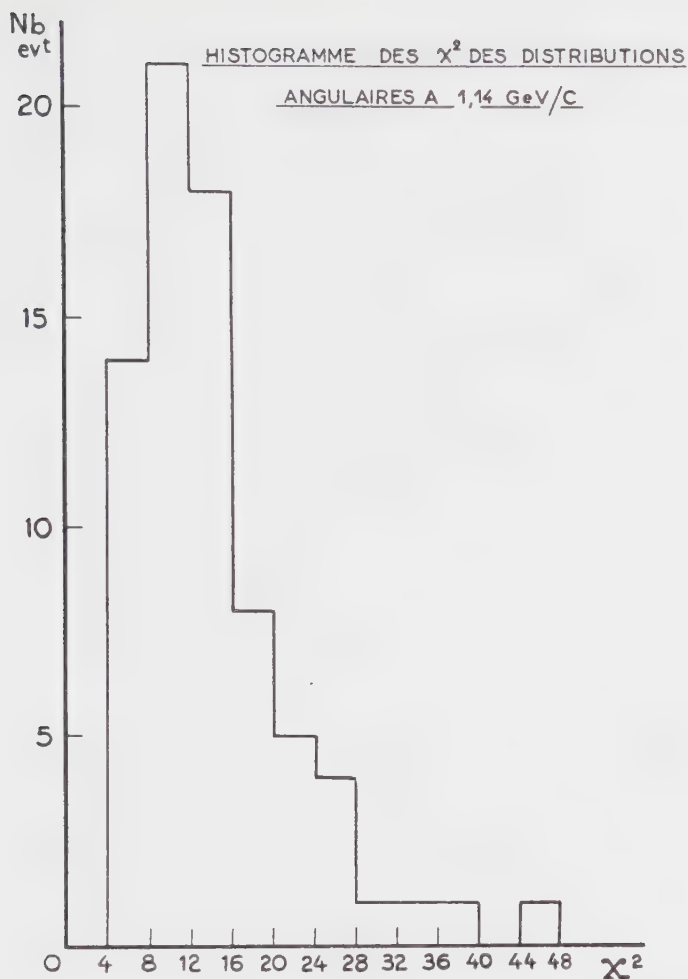
15 événements $2BV^0$, 494 désintégrations à une branche et 43 à trois branches ont été relevés. Nous avons calculé les facteurs correctifs de la même façon qu'à $1,14 \text{ GeV}/c$ et ceci nous a conduit à : $\nu = 16,7$

$$K = 649,64$$

le rapport d'embranchement obtenu est de $7 \pm 1,4\%$

FIGURE 6





et la section efficace a une valeur de :

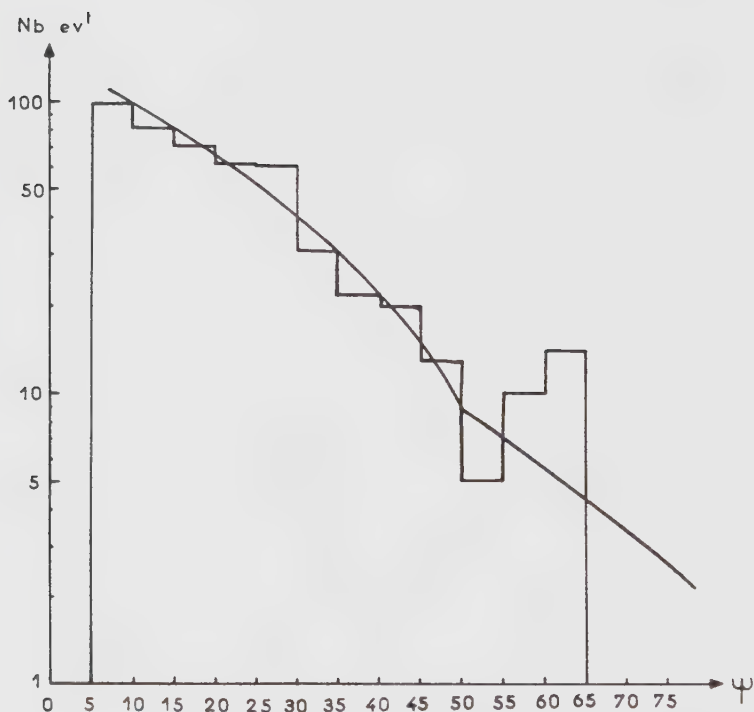
$$\sigma = 3,0 \pm 0,8 \text{ mb.}$$

Le χ^2 de l'homogénéité du rapport des $2B V^0$ au nombre de désintégrations est de 29 pour une espérance mathématique de 24, et le χ^2 relatif au dépouillement des mésons τ atteint 44.

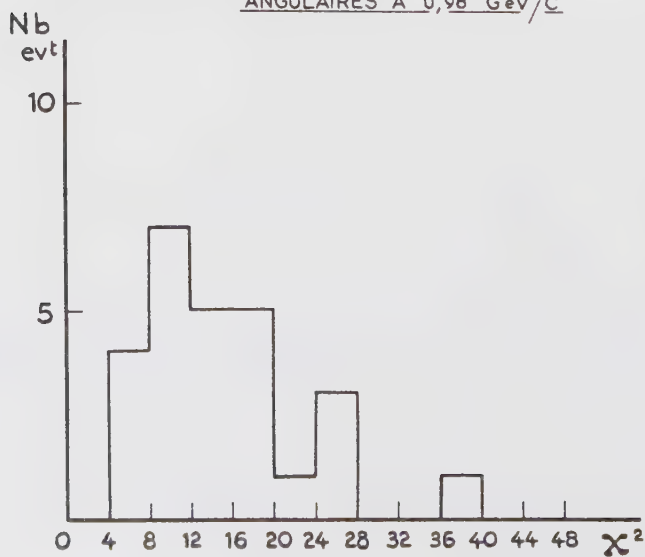
La répartition angulaire (Fig. 8) diffère notablement de la courbe théorique puisque le χ^2 est de 39 pour une valeur attendue de 14 et que l'histogramme des différents χ^2 a son maximum déplacé vers les grandes valeurs (Fig. 9).

REPARTITION ANGULAIRE DE DESINTEGRATION
DES K^+ DE 0,98 GeV/C

courbe théorique adaptée



HISTOGRAMME DES χ^2 DES DISTRIBUTIONS
ANGULAIRES A 0,98 GeV/C



8) Calcul des corrections des nombres d'interactions et de désintégrations

a) Correction d'ue au vol des V^0 courts.

Lorsque le V^0 se désintègre à une distance de l'apex qui est de l'ordre du demi-millimètre sur la table de dépouillement, il est difficile de distinguer les $2BV^0$ des processus inélastiques avec création de deux mésons π chargés qui se manifestent sous forme d'étoiles à quatre branches dus à des K^+ , des protons, ou des π incidents.

D'une manière générale nous avons relevé les événements à 4 branches mais sans en faire l'analyse cinématique.

Pour corriger nos résultats la solution la plus simple consiste à considérer les K^0 à l'arrêt dans leur centre de masse, si N_0 est leur nombre originel, au bout d'un temps t il en reste :

$$\tau_0 \text{ étant leur temps de vie soit } 10^{-10} \text{ s.} \quad N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$$

La vitesse de désintégration est obtenue par dérivation soit :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N_0}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \quad (9)$$

si nous calculons pour chaque événement le temps, dans son centre de masse, au bout duquel il s'est désintégré et en faisons un histogramme, ce graphique doit suivre une courbe exponentielle sauf pour les temps très courts, pour lesquels nos mesures sont mauvaises.

Nous calculons le temps de vie dans le système du centre de masse à partir des quantités mesurées dans le système du laboratoire telles qu'elles sortent du programme de cinématique, par

$$t = \frac{l m}{p c} \quad (10)$$

l étant le parcours apex-vertex du K^0 et p son impulsion.

La quantité physique difficile à mesurer et dont l'observation peut entraîner des erreurs systématiques est la longueur de vol en projection horizontale, telle que nous l'observons sur les tables de dépouillement et c'est elle qu'il faut faire apparaître dans nos calculs.

Reprenons l'expression du nombre de K^0 non désintégrés :

$$N = N_0 e^{-\frac{l m}{p c \tau_0}}$$

la probabilité de voir un K^0 , c'est-à-dire qu'il se désintègre au-delà d'une distance de 2 de l'apex, est :

$$P = e^{-\frac{l m}{p c \tau_0}} \quad (11)$$

multiplions haut et bas par $\cos \delta$, δ étant l'angle de site

$$P = e^{-\frac{l \cos \delta m}{p \cos \delta c \tau_0}}$$

Autrement dit la probabilité de voir un K^0 d'impulsion p , et de site δ au-delà d'une distance projetée d de l'apex est :

$$P = e^{-\frac{d m}{p \cos \delta c \tau_0}} \quad (12)$$

Ce qui signifie que, si nous décidons de ne garder que les événements dont la distance apex-vertex en projection est supérieure à d , il faut effectuer à chacun un poids égal à l'inverse de sa probabilité d'être vu soit :

$$\Omega = e^{\frac{d m}{p \cos \delta c \tau_0}}$$

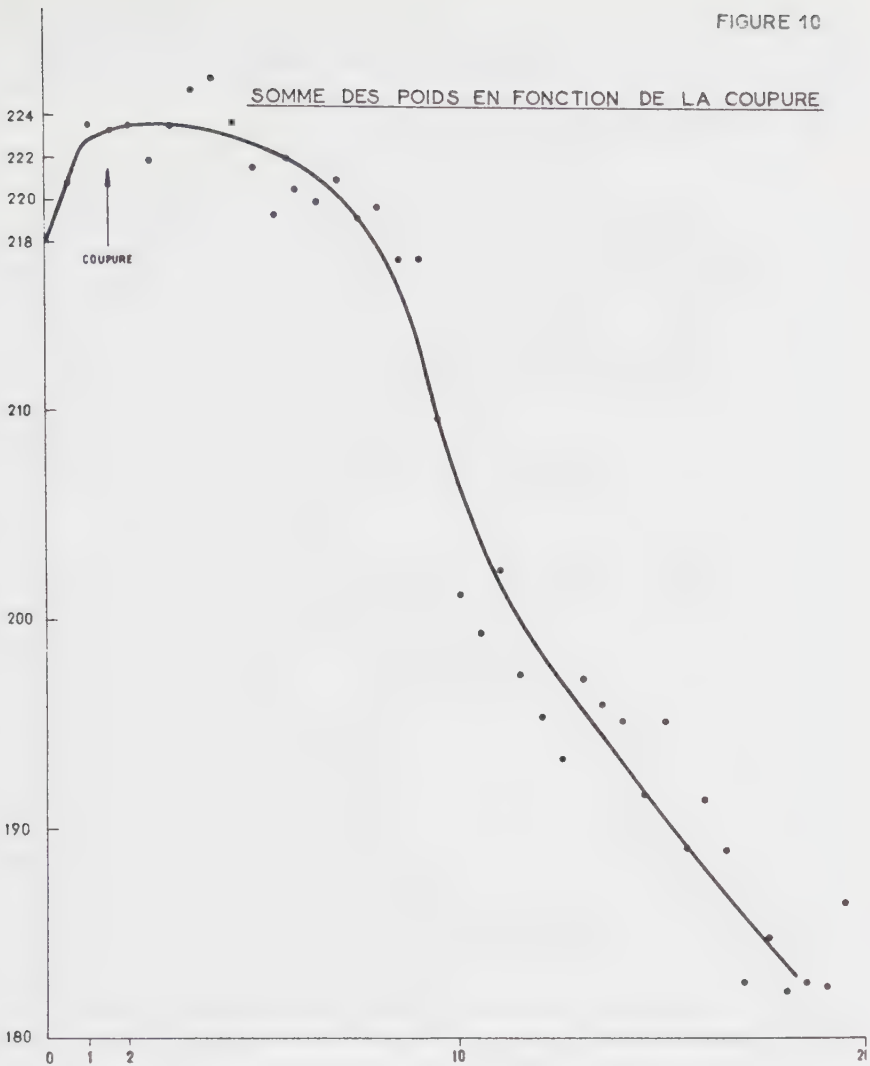
Nous avons calculé pour différentes valeurs de d le poids de chaque événement et tracé la variation de la somme de ces poids en fonction de la coupure d .

Les résultats sont portés sur la courbe (10).

Il est normal que cette courbe présente un plateau car le spectre d'impulsions projetées du K^0 (courbe 11) montre que l'impulsion la plus basse est de 50 MeV/c. Or l'influence de la coupure n'est importante que pour les distances telles que :

$$\frac{d m}{p \cos \delta c \tau_0} \approx 1$$

ce qui pour 50 MeV/c nous donne 3,2 mm.



Pour ne pas rejeter trop d'événements nous avons coupé au bord gauche du palier, à 1,5 mm et nous avons obtenu le facteur correctif cherché

$$\frac{233}{218} = 1,0230.$$

Ce calcul a été fait avant l'obtention de tous les événements. Il est finalement apparu que la coupure à 1,5 mm nous conduit à rejeter 13 événements sur les 222 bien analysés.

b) Correction due au parcours potentiel des V^0 .

Pour chaque événement nous avons calculé le parcours potentiel du V^0 , c'est-à-dire la distance L , mesurée sur sa ligne de vol, de l'apex à la paroi de la chambre.

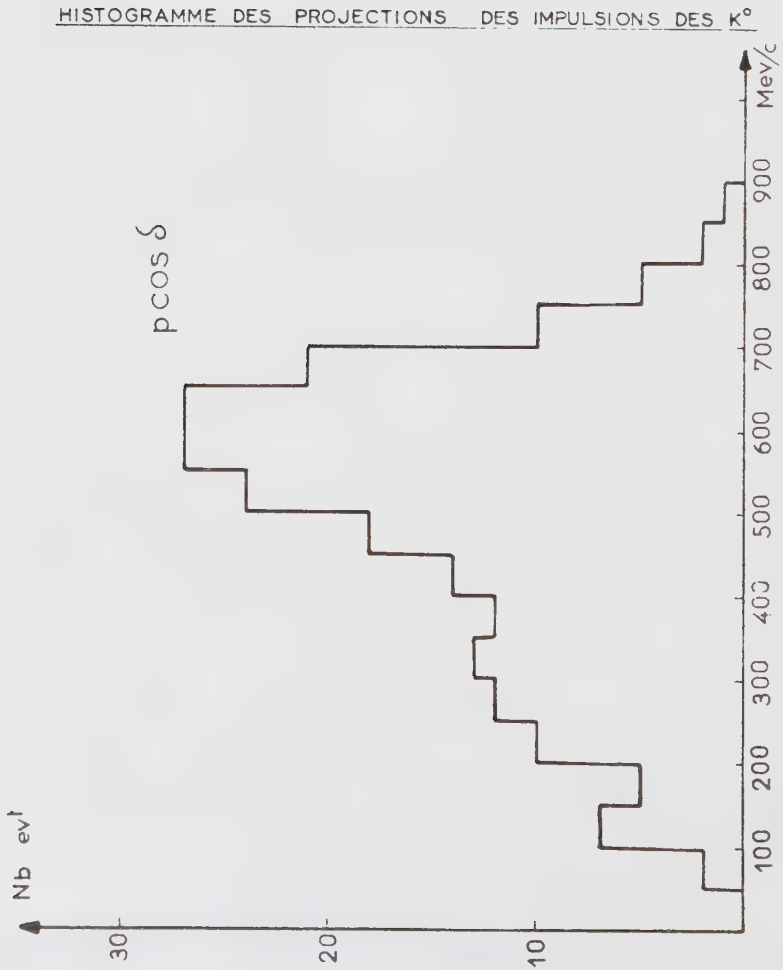
En reprenant la formule (11) nous voyons que la probabilité pour que K^0 se désintègre en deçà de la distance L est :

$$P' = 1 - e^{-\frac{L \cdot m}{p c \tau_0}} \quad (13)$$

et que nous devons affecter à chaque événement un poids de :

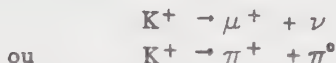
$$\Omega' = \frac{1}{1 - e^{-\frac{L \cdot m}{p c \tau_0}}}$$

FIGURE 11



c) *Calcul de la répartition angulaire théorique de désintégration.*

Nous devons calculer, pour une désintégration en deux corps du type:



la probabilité de désintégration en fonction de l'angle en projection, dans le laboratoire, de la branche secondaire avec la branche primaire.

Pour simplifier nous assimilerons la projection conique à une projection orthogonale. Cette approximation est justifiée par le fait que le centre optique de la camera est à 1,4 m du milieu de la chambre alors que la distance moyenne du point de désintégration au pied de l'axe optique est de 15 cm.

Soit ψ l'angle en projection $\vec{K} \vec{\mu}$ ou $\vec{K} \vec{\pi}$ (Fig. 12) et P la probabilité.

Pour calculer $\frac{dp}{d\psi}$ nous ferons les changements de variables suivants

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{dP}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{d\psi}$$

$d\sigma$ est l'élément de surface de la sphère centrée sur le point de désintégration du K^+ dans son centre de masse.

θ est l'angle $\vec{K} \vec{\mu}$ dans le centre de masse du K^+

φ est l'angle $\vec{K} \vec{\mu}$ dans le laboratoire

ds est l'élément de surface dans le laboratoire centrée sur le K^+ en mouvement.

Le spin du K^+ est nul, donc au repos sa probabilité de désintégration est isotrope.

$$\frac{dP}{d\sigma} = \frac{1}{4\pi}$$

Dans la figure 13 nous voyons que les angles α, φ, ψ sont reliés par :

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \psi \quad (15)$$

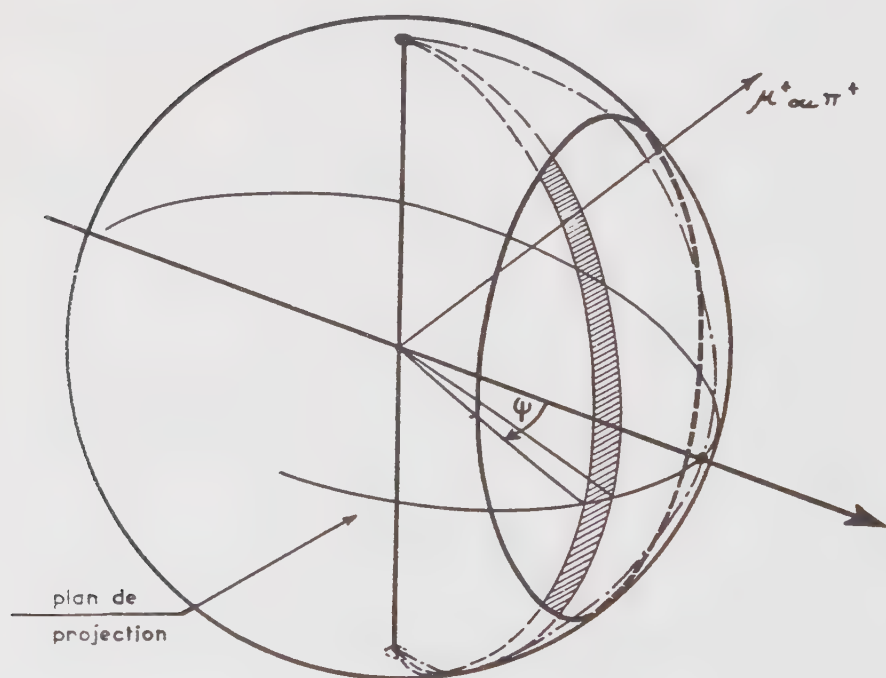
α étant l'angle de la branche secondaire et du plan de projection. L'élément d'aire peut s'exprimer soit en fonction de φ , soit en fonction de α et de ψ

- en fonction de φ

$$ds = 2\pi \sin \varphi d\varphi \quad \text{soit } 2\pi \cos \psi \sin \alpha d\alpha \text{ en différenciant} \quad (15)$$

FIGURE 12

REPRESENTATION DANS LE LABORATOIRE D'UN SECTEUR
ANGULAIRE DE DESINTEGRATION DU K^+



- en fonction de α et de ψ

$$ds = \cos \alpha \, d\alpha \, d\psi$$

Portons ces quantités dans la relation (14)

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi \sin \theta \, d\theta \cos \alpha \, d\alpha}{2\pi \cos \psi \sin \alpha \, d\alpha} = \frac{1}{4\pi \cos \psi} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$dP = \frac{1}{4\pi \cos \psi} \frac{\sin \theta \, d\theta \, d\psi}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (16)$$

Pour une bande angulaire donnée, centrée sur ψ_1 , et de largeur $\Delta \psi$ la probabilité de présence doit être intégrée sur la variable θ .

Les limites de θ (s.c.m.) sont liées à celles de φ (lab) par la formule classique :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\Gamma} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + c} \quad \text{avec} \quad c = \frac{\beta_{K^+}}{\beta_{\mu}} \quad (17)$$

à 1,14 GeV/c, le rapport C est supérieur à 1 car le K^+ dans le laboratoire est plus rapide que le μ ou le π dans le s. c. m. du K^+ donc φ possède un maximum. Les branches secondaires sont contenues dans un cône d'angle au sommet φ maximum tel que :

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max.} = \frac{1}{\Gamma_1 \sqrt{c^2 - 1}}$$

Cet angle vaut 79° pour les μ et 39° pour les π

Les bornes en θ sont les 2 angles dans le s. c. m. qui correspondent à l'angle ψ dans le laboratoire et $\operatorname{tg} \alpha$ nécessaire au calcul s'obtient en résolvant les équations (15) et (17)

$$\operatorname{tg} \alpha = \left[\cos^2 \varphi \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\Gamma^2 \cos^2 \theta + c^2} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour avoir la probabilité totale il faut multiplier la formule (16) par un facteur 4 pour tenir compte des deux secteurs haut et bas et des deux secteurs droite et gauche qui correspondent à une même valeur absolue de l'angle ψ , d'où la probabilité de désintégration dans un secteur angulaire donné :

$$\Delta P = \frac{\Delta \psi}{\pi \cos \psi} \int_{\theta_1}^{\theta_f} \frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} \alpha} \, d\theta \quad (20)$$

Le problème est différent pour l'impulsion de 0,98 GeV/c et la désintégration $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ car dans ce cas c est inférieur à 1, le K^+ étant moins rapide que le μ , et celui-ci peut être émis en arrière dans le laboratoire.

Pour que la somme de ces probabilités élémentaires en fonction de ψ soit égale à l'unité à 1°/°° près, il faut intégrer en φ par une méthode de trapèzes à 200 pas et prendre des intervalles de ψ égaux au plus à 0,625°.

IV. POIDS STATISTIQUE DES EVENEMENTS

1) Définition. Principes de la méthode.

Si, pour la mesure de la section efficace nous devons compter tous les événements $2BV^0$ dont l'apex est situé dans le volume utile, il n'en est pas de même pour l'étude cinématique de la réaction car nous devons obtenir de bonnes reconstitutions géométriques et cinématiques. Pour cela il est nécessaire de ne garder que les événements dont toutes les traces, y compris celles du V^0 sont suffisamment longues pour être correctement mesurées ; ceci nécessite une longueur disponible d'au moins 5 cm en grandeur vraie ce qui nous a conduit à ne conserver que les événements dont l'apex et le vertex sont à la fois dans le volume utile. Cette restriction abaisse le nombre des événements à 222 parmi lesquels 13 ont été rejetés à cause de leur distance Apex-Vertex inférieure à 1,5 mm. Il reste donc 209 événements affectés chacun d'un poids Ω calculé comme l'inverse de la probabilité P de détection (P est identique au $\int |x_1||x_2|$ de l'annexe II, Chap. IV).

La probabilité d'avoir en projection une distance Apex Vertex supérieure à d a été calculée (Chap. III 8_a) (formule 12).

$$P_1 = e^{-\frac{d m}{p \cos \delta c \tau_0}} \quad (1)$$

De même celle d'observer une désintégration du K^0 au-delà d'une distance L' est (Chap. III, formule 11).

$$P_2 = e^{-\frac{L' m}{p c \tau_0}} \quad (2)$$

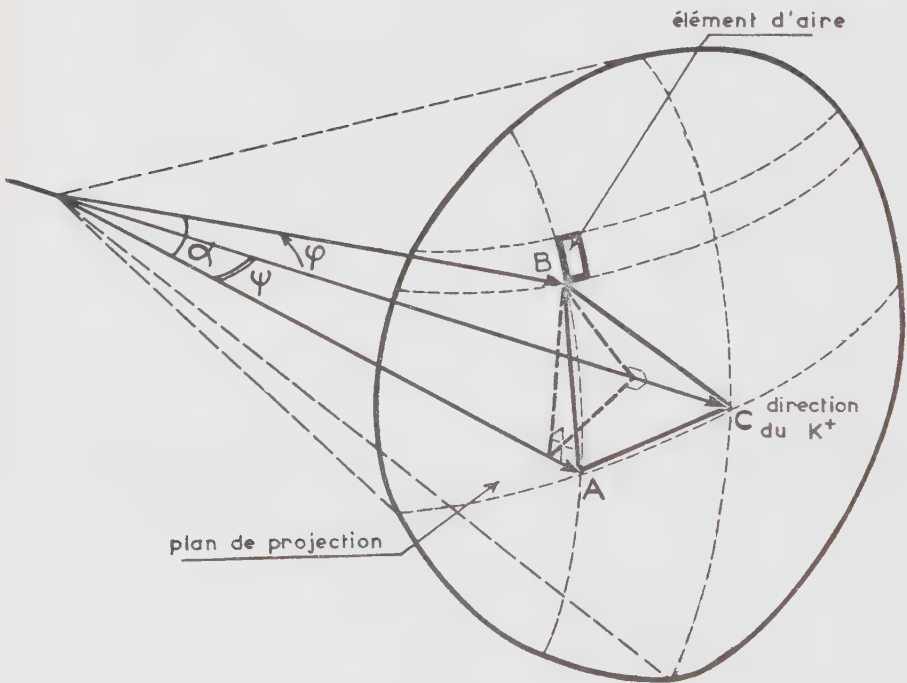
La probabilité pour un événement d'être retenu dans notre échantillonnage est égale à la différence de (1), (2), ci-dessus puisque le V^0 doit être à une distance de l'apex supérieure à $\frac{d}{\cos \delta}$ et inférieure à L' donc :

$$P = e^{-\frac{d m}{p \cos \delta c \tau_0}} - e^{-\frac{L' m}{p c \tau_0}}$$

Ce calcul est légèrement différent de celui de la correction de la section efficace qui est moins rigoureux. Il est équivalent si la quantité $e^{-\frac{L' m}{p c \tau_0}}$ est petite, ce qui est le cas pour la section efficace puisqu'il suffit que le V^0 soit dans la chambre pour que l'événement soit compté ; son parcours potentiel est donc grand et l'exponentielle faible. Ce n'est pas le cas ici, car pour être retenu dans l'analyse cinématique, l'événement doit avoir son V^0 dans le volume utile et la distance L' de l'apex à la paroi de ce volume peut être courte, de l'ordre de quelques centimètres.

FIGURE 13

RELATION ENTRE LES DIFFERENTS ANGLES
DANS LE CALCUL DE $\frac{\Delta P}{\Delta \psi}$



Chaque événement doit être affecté du poids :

$$\Omega = \frac{1}{e - \frac{dm}{p \cos \delta c \tau_0} - \frac{L' m}{p c \tau_0}} \quad (3)$$

La difficulté pratique est de calculer L' . L'approximation de la projection orthogonale n'est pas justifiée car elle peut entraîner des erreurs de l'ordre du centimètre, aussi avons-nous défini le volume utile par les coordonnées paramétriques d'un cône s'appuyant sur la courbe du volume utile en projection, dessiné sur la table de dépouillement. L'intersection de ce volume avec la ligne de vol nous donne L' .

Le poids ainsi calculé est rattaché à l'événement comme ses autres caractéristiques physiques obtenues à partir du programme GRIND: masses des résonances possibles, angles entre les particules, etc., nous l'avons introduit comme dernière donnée dans la bibliothèque * de l'expérience constituée selon la technique des invariants (annexe III).

La nécessité d'attribuer un poids à chaque événement nous a conduit à développer une méthode statistique (annexe II, Chap. V et VI) qui exige que la hauteur η de l'histogramme soit définie comme la somme des poids des événements contenus dans chacune des bandes considérées et que l'erreur statistique soit égale à la valeur attendue de la somme des carrés des poids des événements de cette bande.

$$\eta = \sum \Omega \quad \text{et} \quad \sigma_{\eta}^2 = \sum \Omega^2$$

2) Test sur σ^2_{η}

Nous avons vu que nous approchons la quantité $\sigma^2_{\eta} = \sum \Omega^2$
 par $\sigma^2_{\eta} = \sum \Omega^2$ ou par $\sigma^2_{\eta} = \sum \bar{\Omega} \sigma_x^2$
 en posant $\sigma_x^2 = \int \frac{F \cdot dx}{P}$ (annexe II, § V, 3,)

Nous pouvons contrôler la validité de ces approximations en étudiant la moyenne statistique de la somme des carrés des poids.

Soit l le parcours potentiel en projection du V^0 dans le volume utile de longueur L , et φ l'ensemble des autres paramètres physiques du K^0 (impulsion, cosinus directeurs..)

$$p dx = \frac{dl}{L_0} g(\varphi)$$

Comme p est normée, $g(\varphi)$ l'est aussi en φ

La probabilité de détection P , si nous admettons que tous les V^0 sortent par l'avant de la chambre, est:

$$P(\varphi, l) = 1 - e^{-l/\lambda(l)}$$

* Cette bibliothèque a été constituée par J. Poyen

$\lambda(\varphi)$ est égal à : $p \cos \theta \tau_0$
(p impulsion du K^0)

la quantité σ_x^2 s'écrit :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{L_0} \int_0^1 \frac{dl}{1 - e^{-l/\lambda}} \cdot g(\varphi) \cdot d\varphi \quad (4)$$

Nous voyons qu'elle possède un pôle pour $l = 0$, les événements situés trop près de la fin du volume ayant des poids trop grands entraînent une divergence de σ_x^2

Nous pouvons calculer la probabilité P' pour qu'un événement situé dans un domaine ait un poids supérieur à un poids donné Ω_0 (ou que sa probabilité de détection soit inférieure à P_0)

$$\text{or } P_0 = 1 - e^{-l_0/\lambda(\varphi)}$$

Cette valeur est voisine de l_0/λ car nous considérons les événements de poids élevé donc de parcours potentiel court, donc :

$$P' = \frac{\int_0^{l_0} (1 - e^{-l/\lambda}) dl}{\int_0^1 (1 - e^{-l/\lambda}) dl}$$

soit

$$P' = \frac{l_0 - \lambda + \lambda e^{-l_0/\lambda}}{L_0 - \lambda + \lambda e^{-L/\lambda}}$$

Si nous supposons que l_0 est petit devant λ (λ est le parcours moyen d'un K^0 soit de l'ordre de 3 à 4 cm) et L grand, l'expression s'écrit plus simplement

$$P' = \frac{l_0^2}{2\lambda(L_0 - \lambda)}$$

remplaçons l_0/λ par P_0 il vient

$$P' = \frac{\lambda P_0^2}{2(L_0 - \lambda)}$$

et si nous négligeons λ devant L

$$P' = \frac{\lambda}{2L_0(\Omega_0^2)}$$

La probabilité pour que tous les poids soient supérieurs à Ω_0 est :

$$P' = \frac{\int \lambda g(\varphi) d\varphi}{2L_0\Omega_0^2} = \frac{1}{2L_0\Omega_0^2} \int \lambda g(\varphi) d\varphi = \frac{\bar{\lambda}}{2L_0\Omega_0^2}$$

D

On voit qu'elle est proportionnelle à $1/\Omega_0^2$, donc la distribution de poids varie comme $1/\Omega^3$, et la moyenne des poids qui est proportionnelle à :

$$\int \frac{\bar{\lambda}}{L} \frac{d\Omega}{\Omega^2}$$

converge, tandis que la moyenne des carrés des poids proportionnelle à :

$$\int \frac{\bar{\lambda}}{L} \frac{d\Omega}{\Omega}$$

diverge.

Cette divergence signifie que σ_{η}^2 peut devenir infini ou du moins très grand, à cause du poids trop élevé de certains événements, ce qui rend impossible tout calcul de χ^2 .

Expérimentalement, en gardant le même volume sensible pour les apex et les vertex, le poids maximum obtenu est de 2,9 ; la probabilité d'avoir un poids supérieur à 2,9 est $P = 6,9 \cdot 10^{-3}$.

La probabilité pour que toutes les valeurs de Ω , attachées aux 209 événements soient inférieures à 2,9 est : $(1 - P)^{209}$ soit 25% pour une valeur attendue de 50%.

Pour éliminer les effets de la divergence de la moyenne des carrés des poids, introduisons un volume utile différent pour les apex et les vertex, soit ϵ la distance de coupure du front des apex à la coupure des vertex.

Le poids de chaque événement est encore :

$$\Omega = \frac{1}{1 - e^{-1/\lambda}} \quad (5)$$

mais il possède maintenant un maximum $\frac{1}{1 - e^{-\epsilon/\lambda}}$

pratiquement égal à : λ/ϵ

qui intervient dans le calcul du poids carré moyen.

$$\bar{\Omega}^2 = \int_1^{\lambda/\epsilon} \frac{\lambda}{L} \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\lambda}{L} (\text{Log } \lambda - \text{Log } \epsilon)$$

3) Choix de la coupure.

Si nous augmentons ϵ , le poids de chaque événement diminue, mais le nombre d'événements contenu dans le volume diminue aussi. Le nombre réel physique d'événements présents, détectés ou non, est proportionnel à la longueur du volume utile :

$$N_p = B (L - \epsilon)$$

Si nous voulons avoir le maximum de précision sur la fonction r , probabilité physique d'avoir un événement de caractéristiques cinématiques données ($r = \bar{\eta}$ - voir annexe II) il nous faut minimiser la quantité :

$$\frac{\sigma_{\eta}^2}{\bar{\eta}^2}$$

Nous avons déjà calculé σ_x^2 par la formule (4). Remplaçons 0 par ϵ dans la borne inférieure d'intégration, changeons le terme L de normalisation en $L - \epsilon$, et intégrons sur toutes les valeurs de φ

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{L - \epsilon} \int_{\epsilon/\lambda}^L \frac{dl}{1 - e^{-l/\lambda}}$$

$\bar{\eta}$ est proportionnel au nombre vrai d'événements donc à $L - \epsilon$

$$\text{posons } \bar{\eta} = C (L - \epsilon)$$

le quotient à minimiser s'écrit :

$$\frac{\sigma_{\eta}^2}{\bar{\eta}^2} = \frac{\lambda}{C(L - \epsilon)^2} \int_{\epsilon/\lambda}^{L/\lambda} \frac{dz}{1 - e^{-z}} = \frac{1}{C} \frac{\lambda}{(L - \epsilon)^2} \left[\frac{L}{\lambda} - \text{Log}(e^{\epsilon/\lambda} - 1) \right]$$

et par dérivation nous obtenons la condition en ϵ :

$$2L - 2\lambda \text{Log}(e^{\epsilon/\lambda} - 1) - \frac{L - \epsilon}{e^{\epsilon/\lambda} - 1} = 0$$

les résultats numériques sont :

pour $p \cos \theta$	soit pour	$\bar{\lambda} = 2,95 :$	$\epsilon = 1,11 \text{ cm}$
$p \cos \theta$ maximum	"	$\lambda_M = 6 \text{ cm} :$	$\epsilon = 2,08 \text{ cm}$
$p \cos \theta$ minimum	"	$\lambda_m = 0,3 \text{ cm} :$	$\epsilon = 0,12 \text{ cm}$

Si nous admettons une coupure de 2,08 cm pour les événements de λ proches du λ max. la quantité $\frac{\sigma_{\eta}^2}{\bar{\eta}^2}$ n'est qu'à 4 % du minimum, tandis que si nous coupons à 0,12 cm, elle est multipliée par 2.

Le terme sensible est donc la coupure pour les grandes impulsions, d'où la décision de couper à 2 cm. Cette coupure a entraîné le rejet de 3 événements, le poids maximum est 2,7, le poids moyen 1,15 et la somme des poids 237,15.

4) Test sur σ_x^2

Calculons le rapport $\sigma_{\eta}^2 / \bar{\eta}^2$ après cette coupure, rapport que nous pouvons majorer en minimisant l'exponentielle selon : $1 + \epsilon/\lambda$

$$\frac{\sigma_{\eta}^2}{\bar{\eta}^2} = \frac{\lambda}{C(L - \epsilon)^2} \left[\frac{L}{\lambda} - \frac{\epsilon}{\lambda} + 1 \right] = \frac{1}{C(L - \epsilon)} \left[1 + \frac{\lambda}{L - \epsilon} \right]$$

L'espérance mathématique de ce rapport est :

$$\frac{\sigma^2 \eta}{\bar{\eta}^2} = \frac{1}{\bar{\eta}} \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{L - \epsilon} \right)$$

à partir de cette expression, nous calculons facilement l'espérance mathématique de $\sigma^2 x$

$$\sigma^2 x = 1 + \frac{\bar{\lambda}}{L - \epsilon} = 1,13$$

Dans notre expérience si nous calculons le σ_x^2 général comme la somme des carrés des poids divisée par la somme des poids (annexe II formule 53) nous trouvons 1,18, et non 1,13. Ceci vient du fait que parmi les 206 événements retenus 39 sortent par les plans latéraux et 25 par les glaces latérales. Ceux-ci, soit 30% du total ne peuvent pas suivre la loi théorique en $1 - e^{-1/\lambda}$. Le poids maximum des événements qui sortent par les plans latéraux est de 1,4 ; les autres ont un poids voisin de 1,08. Cet événement de poids maximum 1,4 est à 5 cm du plan latéral, avec une impulsion de 560 MeV/c, donc son poids est dû uniquement à l'impulsion et non à la proximité des plans. D'ailleurs aucun événement ne s'est produit au voisinage de ces plans car le faisceau était correctement centré en hauteur dans la chambre.

V. ETUDE DE L'INTERACTION K^+p

1) Diagramme de Dalitz.

Des 259 événements au dépouillement qui ont conduit à la section efficace de 4,6 mb, nous n'en avons conservé que 206 pour l'étude cinématique après les diverses éliminations.

Nous avons calculé pour chacun d'eux un poids tenant compte des différentes probabilités de désintégration dans le volume utile. Le total des poids est de 237,15 et ceci peut être considéré comme un nombre équivalent d'événements. Une vérification intéressante est faite en ajoutant à ce chiffre les poids des 3 événements dont le retrait avait assuré la convergence de $\overline{\Sigma\Omega^2}$ et les 13 événements non mesurables (Ch. III. 3) affectés chacun du poids moyen. En corrigeant le tout par l'efficacité de dépouillement nous retrouvons à 3^o/40 près et par une méthode différente le chiffre de 264,7 utilisé dans le calcul de la section efficace.

Dans l'étude de l'interaction, pour mesurer les sections efficaces partielles, nous ferons correspondre à un poids de 237,15 une section efficace de 4,6 mb. Le programme GRIND calcule les masses carrées, invariantes des groupements $p\pi$, $K\pi$ et Kp de chaque événement. Les résultats relatifs aux masses carrées $K\pi$ et $p\pi$ sont présentés sur le diagramme de Dalitz (figure 14), avec la courbe de la limite du domaine cinématique de ces masses carrées pour une énergie totale donnée.

Il faut tenir compte dans ce mode de représentation de la dispersion d'impulsion du faisceau incident, celle-ci atteint $\pm 0,027$ GeV/c et ne peut être négligée. Par souci de clarté, nous n'avons représenté que les limites cinématiques correspondant aux valeurs maximum, centrale et minimum de cette impulsion.

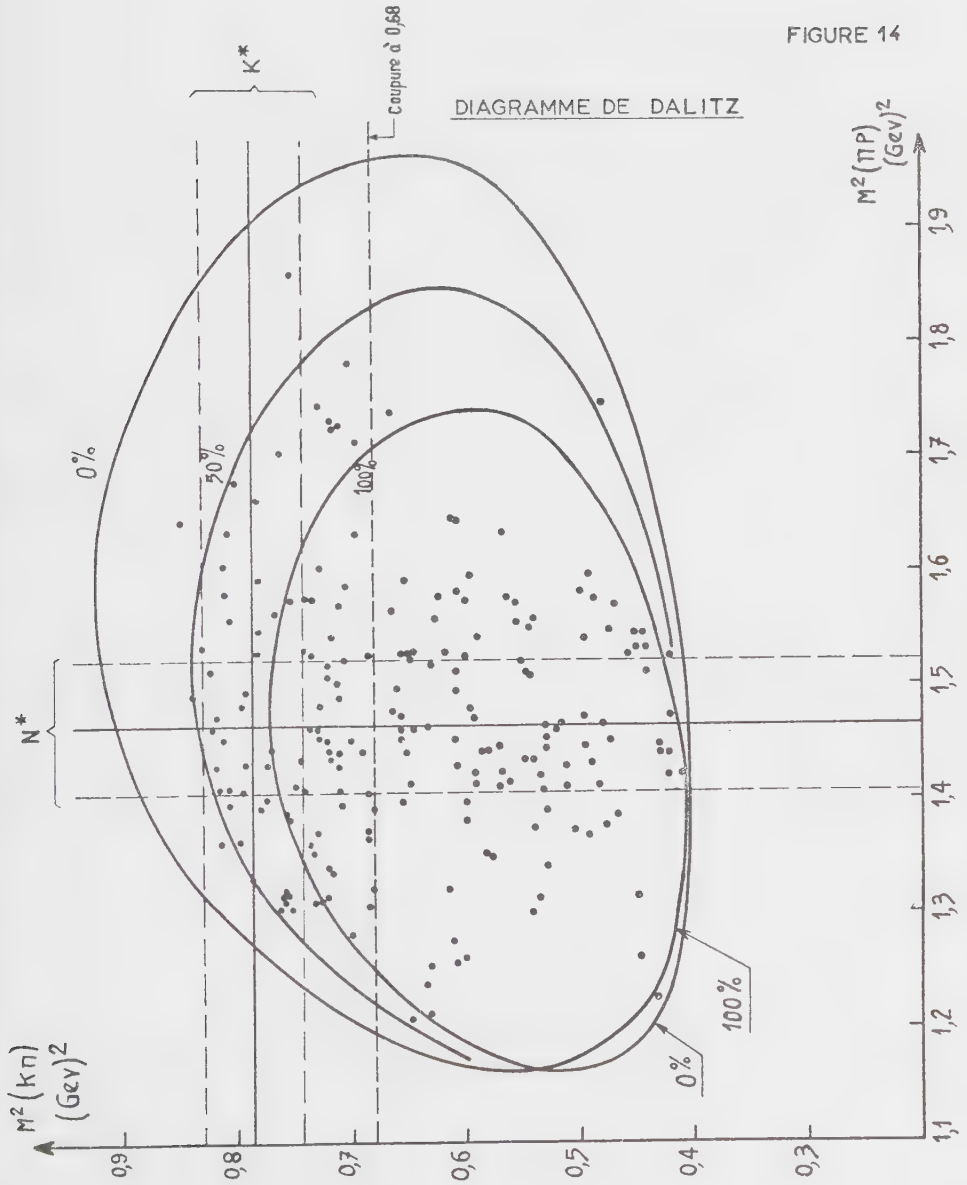
Nous avons tracé les positions des deux résonances attendues, la résonance $p\pi$, ou $N^*_{33}(T=3/2, J=3/2)$ et la résonance $K\pi$ ou $K^*(T=1/2, J=1)$ ⁸⁻¹⁰

Nous voyons qu'il existe une zone importante de recouvrement dans laquelle il est impossible de distinguer à quelle résonance un événement appartient.

2) Obtention d'une résonance pure.

La méthode de conjugaison⁹ décrite en annexe IV permet de reconstituer un échantillonnage d'événements N^* purs, les perturbations dues aux K^* ou aux interférences éventuelles K^*N^* étant éliminées. Pour cette opération une coupure a été pratiquée sur le diagramme de Dalitz au dessous de la zone du K^* à une ordonnée de 0,68 GeV² et les événements de masse carrée $K\pi$ supérieure à cette valeur (exemplaire M) ont été rejetés.

FIGURE 14



Nous avons repeuplé la partie supérieure de la surface Dalitz en effectuant l'opération de conjugaison sur tous les événements restants et en ne gardant parmi les événements fictifs que ceux dont la masse carrée $K \pi$ est supérieure à la coupure (exemplaire D'), ces événements sont les images de ceux situés dans le bas de la surface (exemplaire D).

Cette méthode conduit à rejeter 92 événements (M), à conserver 55 tels quels (exemplaire S) et à compter 59 deux fois (D).

Sur la figure 15 nous avons représenté les localisations de ces différents types d'événements, pour impulsion moyenne du faisceau. Les événements doubles sont situés sous la courbe qui n'est d'ailleurs qu'une représentation approximative à cause de la dispersion d'impulsion. Il est évident que l'exemplaire fictif D' est très fortement corrélié à l'exemplaire D initial. L'opération de conjugaison revient à doubler le poids de chaque événement de D.

Les histogrammes sont obtenus en additionnant les poids des événements S aux poids doublés des événements D d'une bande $M^2_{p\pi}$ donnée et l'échantillonnage N^* pur est représenté sous forme symbolique par :

$$N = \sum \Omega_s + \sum 2 \Omega_D$$

soit :
$$N = S + 2D$$

La figure 16 représente cet exemplaire N ainsi reconstitué.

Les histogrammes des $M^2_{p\pi}$ avant et après cette opération (figure 17 et figure 18) représentent le premier l'ensemble des événements, le second ceux de la résonance $p \pi$ pure.

Cet échantillon N possède un poids de 199,5 ; il lui correspond donc une section efficace de 3,87 mb.

L'erreur statistique est égale à la racine carrée de la somme des carrés des poids (Ann. II. Ch. V) des événements, soit :

$$\sigma_N^2 = \sum \Omega_s^2 + \sum (2 \Omega_D)^2$$

Cette erreur est supérieure à l'erreur sur la section efficace totale, puisqu'en réalité nous n'avons que 114 événements (S + D) indépendants. Nous obtenons :

$$\sigma_{N^*} = 3,9 \pm 0,4 \text{ mb}$$

Conformément à la théorie, dans les calculs suivants, nous avons optimisé les paramètres en utilisant un histogramme à petit découpage en $M^2_{p\pi}$, et pour cela avons choisi un pas de 0,025 GeV².

FIGURE 15

OPERATION DE CONJUGAISON

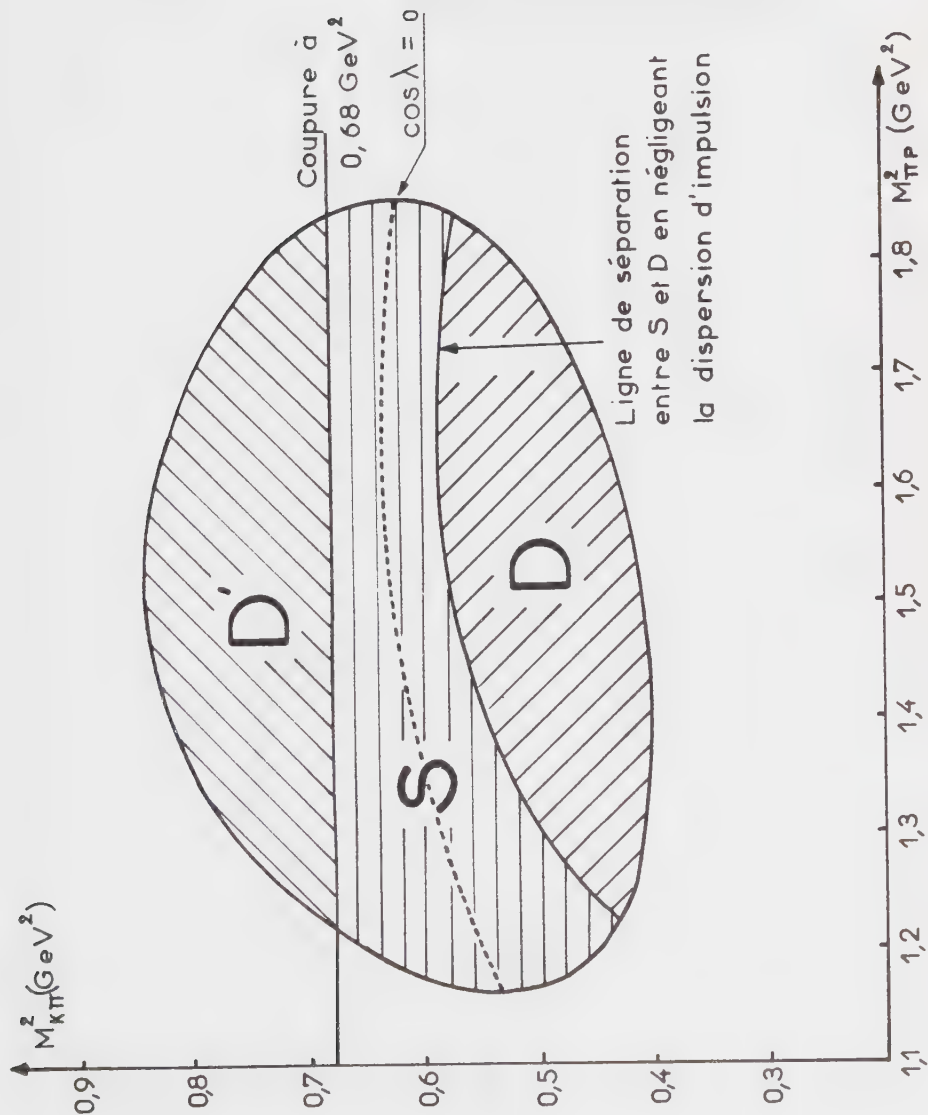


FIGURE 16

RECONSTITUTION DU N^* PUR

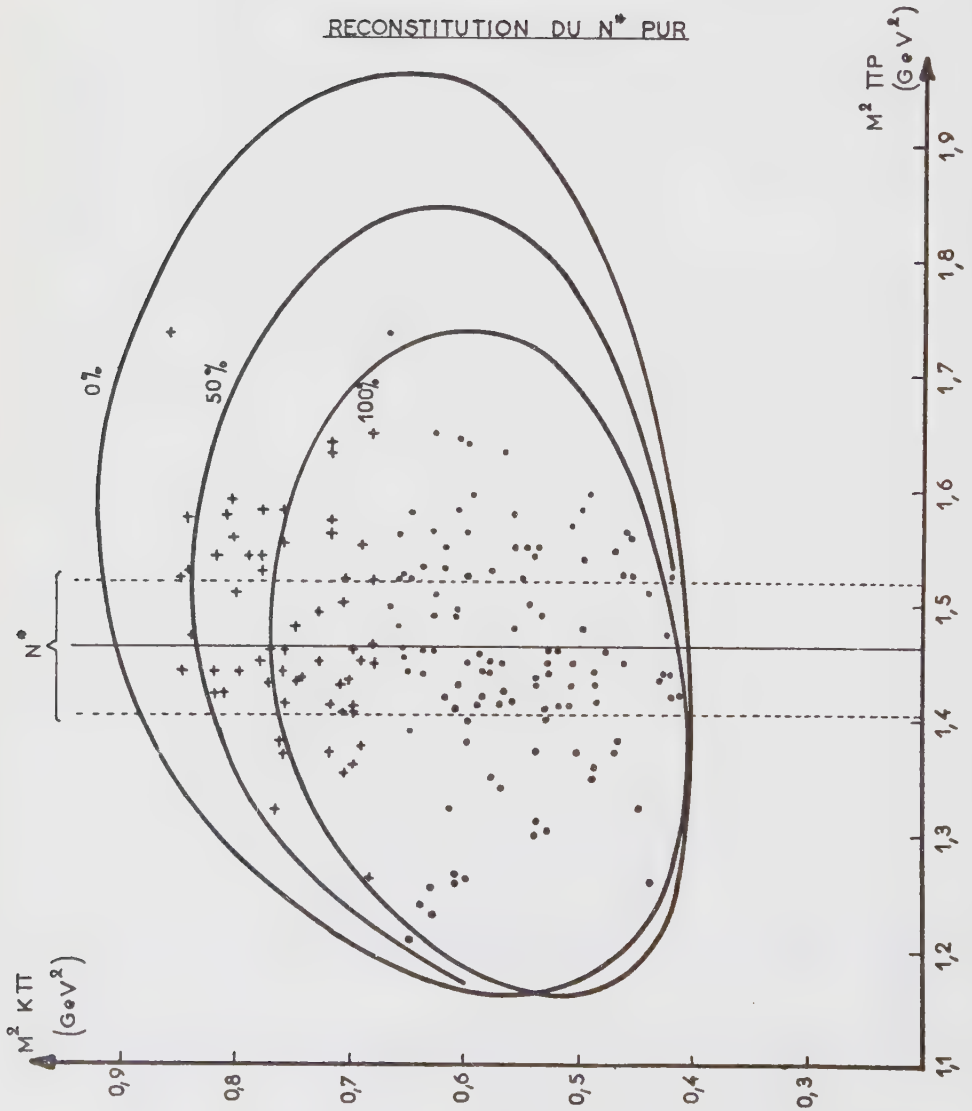


FIGURE 17

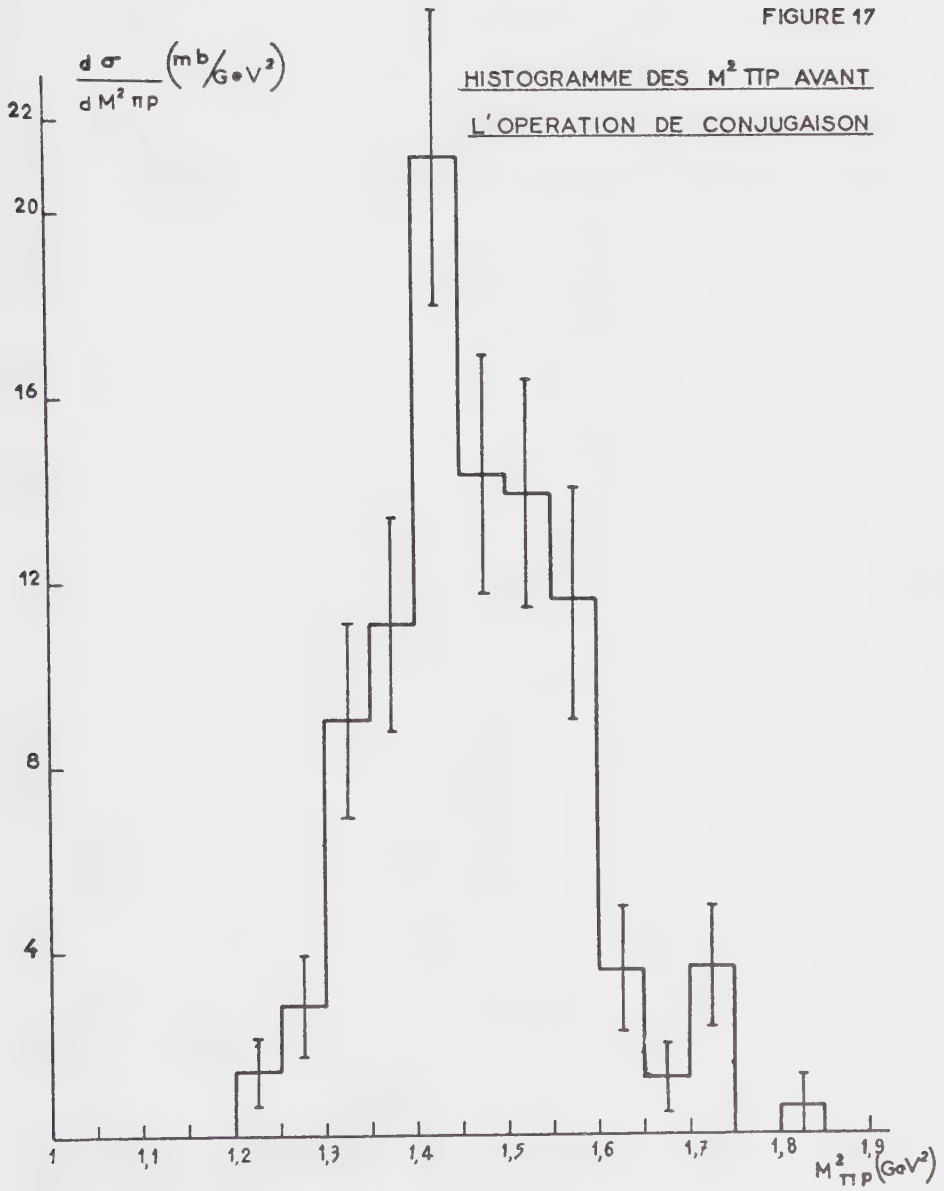
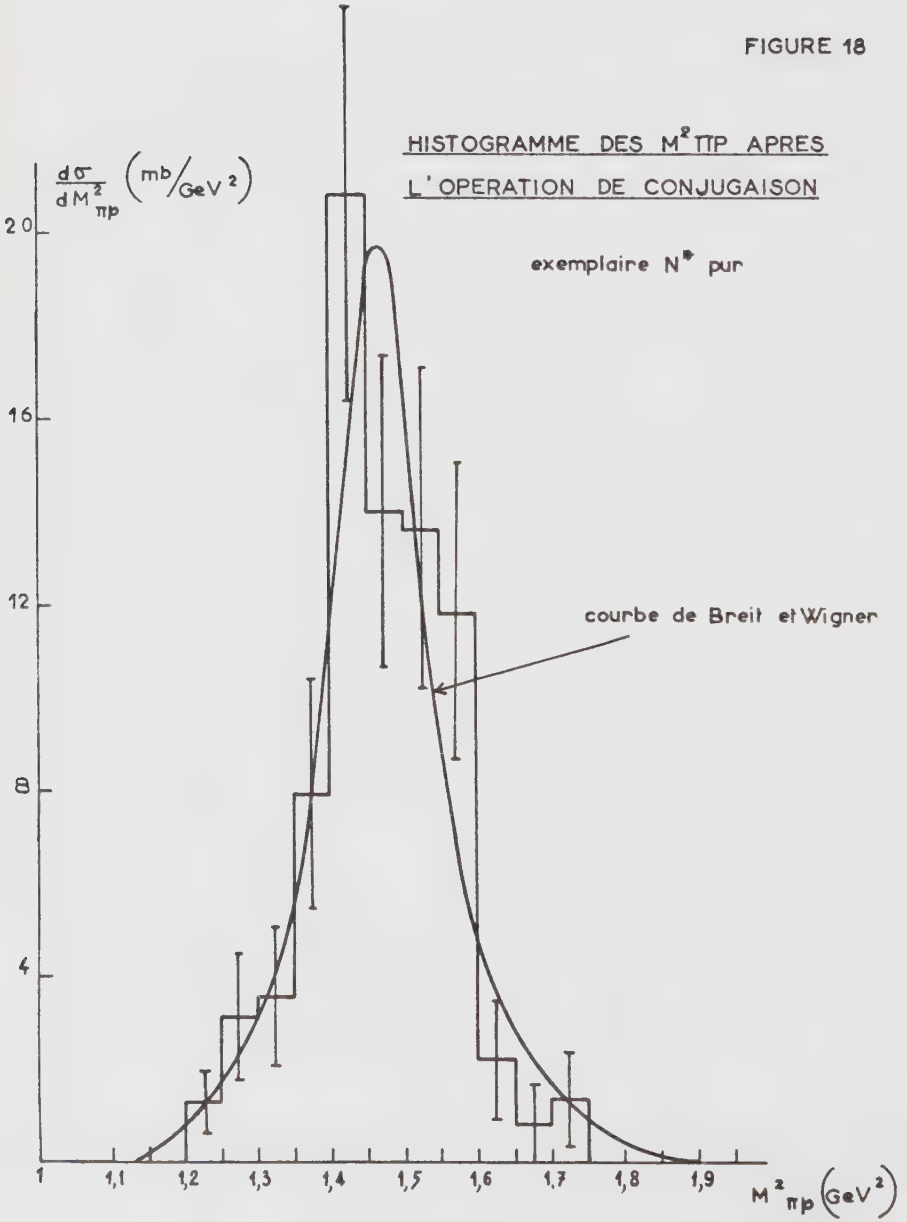


FIGURE 18



Malheureusement la même opération ne peut être effectuée pour le K^* en conjugant les masses carrées πp . Cette opération revient en première approximation à créer une symétrie des événements par rapport à un axe vertical situé au milieu de la surface Dalitz. Il est bien évident qu'étant donnée la position du N^* , celui-ci ne peut être éliminé de cette façon. Cependant, si dans la zone du K^* nous soustrayons la contribution du N^* pur, il reste seulement les événements dûs au K^* et à l'interférence (K^* , N^*).

Cet échantillon peut être représenté par le schéma

$$K = M \cdot D' \quad \text{et} \quad \sigma_k^2 = \Sigma \Omega^2_M + \Sigma \Omega^2_{D'}$$

Les figures 19 et 20 représentent l'histogramme des masses carrées $K\pi$ respectivement avant et après cette opération.

L'échantillonnage K étant associé à un poids total de 37,7 il lui correspond une section efficace de $0,7 \text{ mb} \pm 0,3$.

3) Analyse de la résonance N^* .

Pour étudier la résonance nous pouvons proposer diverses hypothèses concernant le mécanisme de la réaction ; ces hypothèses conduisent à des formules mathématiques dont il faut adapter la courbe représentative à l'histogramme de masse. L'ajustement de ces courbes est effectué au moyen de la méthode et du programme décrits en annexe II. Les valeurs du χ^2 obtenues permettent de retenir la plus vraisemblable des hypothèses envisagées. Quelles que soient ces hypothèses le nombre d'événements dans un domaine cinématique de l'état final donné, est obtenu par la règle de Fermi.

$$n = \frac{1}{v} N \cdot \emptyset \cdot T^2$$

Le terme de flux $\frac{1}{v}$ concerne le flux incident, il s'agit donc du flux de mésons K^+ qui est le même pour tout le domaine cinématique possible des particules secondaires, c'est-à-dire l'intérieur des courbes de Dalitz; ce terme n'intervient donc pas dans les calculs.

La quantité $N \cdot \emptyset$ est le nombre d'événements dans l'état final, elle est le produit du nombre total d'événements (ou somme des poids) par le volume de l'espace de phase correspondant au domaine cinématique considéré, normalisé à l'événement.

Pour calculer $\emptyset$, nous utilisons la propriété de la représentation de Dalitz: la proportionnalité de l'élément de volume à l'élément d'aire correspondant de la surface de ce domaine cinématique.

Pour tenir compte de l'importante dispersion en impulsion du faisceau de mésons K^+ incidents, nous avons tracé les différentes courbes

FIGURE 19

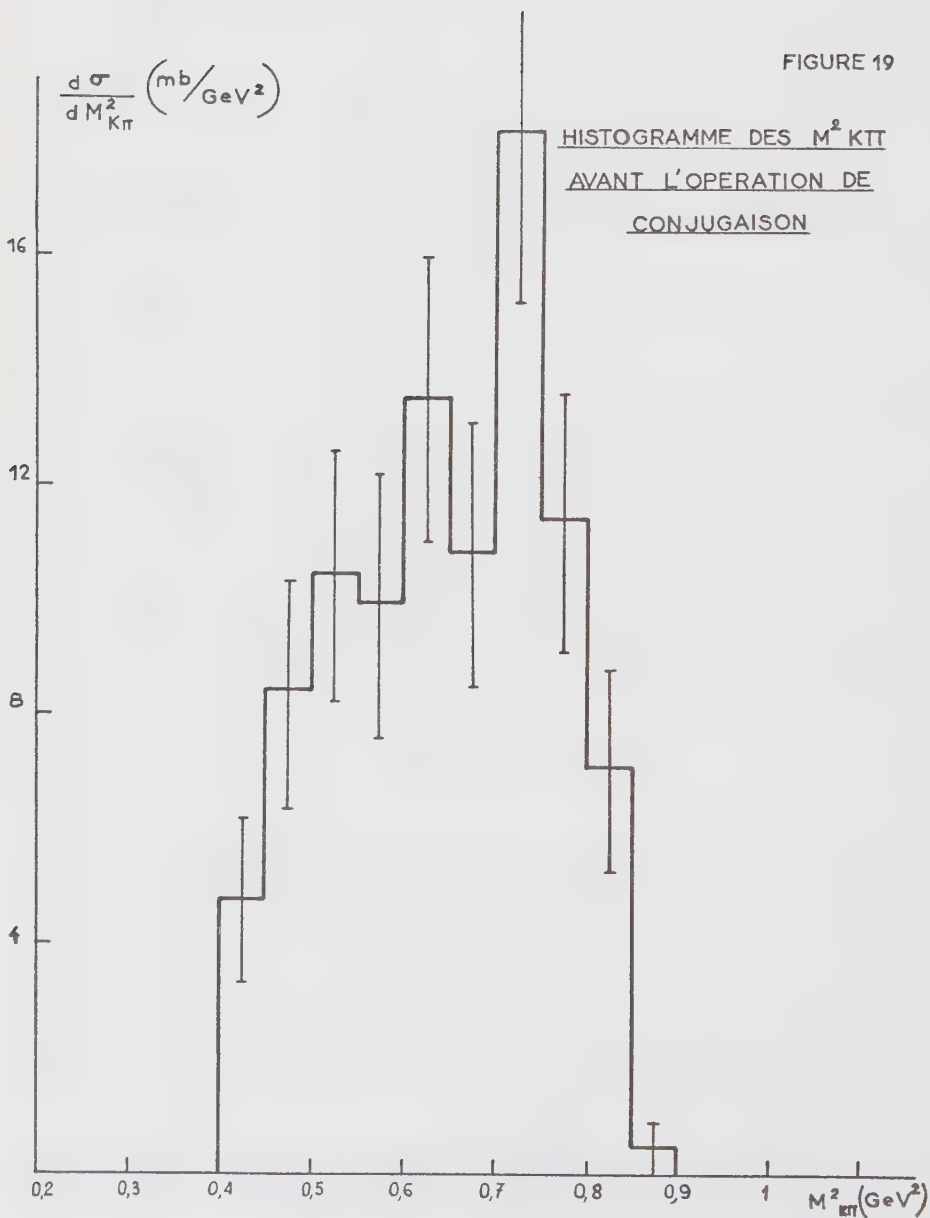
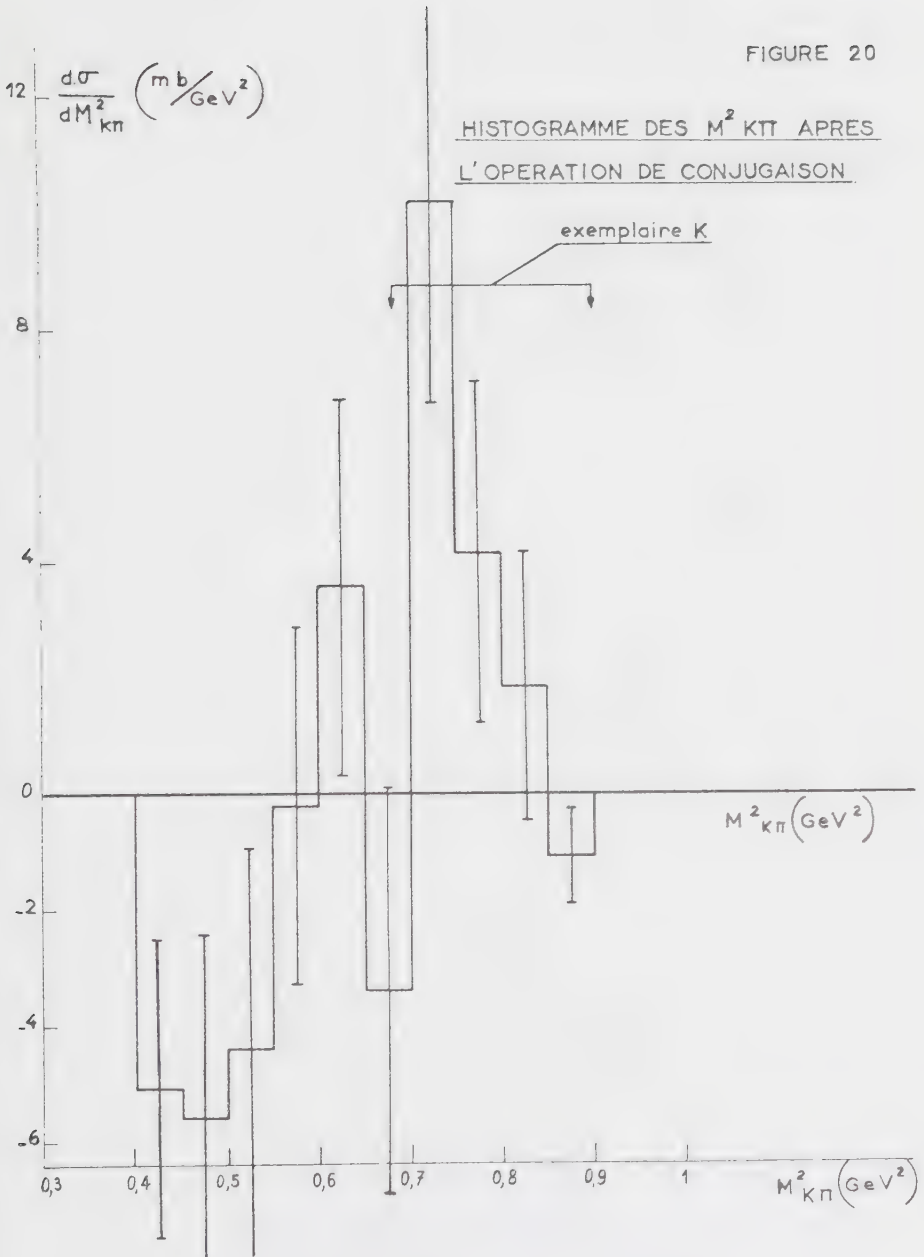


FIGURE 20



correspondant à 100% - 90% ... 0% de particules du faisceau, en affectant chacune d'un poids π proportionnel au pourcentage de particules qu'elles représentent 1; 0,9; ... La distribution d'espace de phase ϕ est une fonction des masses carrées, $M^2_{p\pi}$ pour l'étude du N^* , et a été calculée par une intégration numérique sur la surface de Dalitz.

L'intégrant F est le facteur de poids égal au pourcentage de particules incidentes pour lesquelles cet élément est possible.

A l'aide de la correspondance poids-section efficace, nous avons normalisé toutes les formules à 1 mb, de sorte que la détermination du paramètre d'homologie donne directement la section efficace.

4) Résultats de l'analyse du N^*

L'hypothèse la plus générale consiste à dire que notre échantillon N comprend la résonance N^* , le fond et des effets d'interférence N^* - fond. Nous pouvons représenter la résonance N^* par une formule de Breit et Wigner, la fonction dont la courbe représentative doit s'ajuster à l'histogramme s'écrit alors :

$$\frac{d\sigma}{dM^2_{p\pi}} = a_{\phi} |f_{\phi}|^2 + a_{N^*} |f_{N^*}|^2 + 2 a_1 \operatorname{Re} \left\{ f_{\phi}^* f_{N^*} \right\} \\ + 2 a_2 \operatorname{Im} \left\{ f_{\phi}^* f_{N^*} \right\}$$

expression dans laquelle les fonctions f sont :

$$f_{\phi} = \sqrt{k_{\phi} \cdot \phi M^2_{p\pi}} \\ f_{N^*} = \sqrt{k_{N^*} \cdot \phi M^2_{p\pi}} \cdot \frac{1}{M^2_{p\pi} - M^2_{N^*} - i\eta_{N^*}} \\ f_{\phi}^* f_{N^*} = \sqrt{k_{\phi} k_{N^*}} \cdot \phi \cdot \frac{1}{M^2_{p\pi} M^2_{p\pi} - M^2_{N^*} - i\eta_{N^*}}$$

Les coefficients a_{ϕ} et a_{N^*} représentent les intensités de production du fond et du N^* ; a_1 et a_2 les amplitudes des termes d'interférence. La détermination des coefficients k_{ϕ} , k_{N^*} a été obtenue par normalisation des fonctions à 1 mb, c'est-à-dire par condition

$$\int |f_{\phi}|^2 dM^2_{p\pi} = \int |f_{N^*}|^2 dM^2_{p\pi} = 1$$

L'intégration porte sur la totalité de la surface de Dalitz.

M_{N^*} est la masse de la résonance exprimée en MeV et η la demi-largeur en MeV^2 à mi-hauteur du maximum de la courbe représentant la résonance,

elle est directement reliée à la demi largeur $\Gamma/2$ de la résonance par :

$$\eta = 2 M_{N^*} \frac{\Gamma}{2}$$

Nous pouvons envisager des hypothèses plus simples que celle décrite par la formule 1. La table II présente les valeurs numériques des paramètres obtenues dans le cadre de ces diverses hypothèses simplificatrices ainsi que le χ^2 général de l'optimisation. Dans tous les cas nous avons conservé comme paramètres ajustables la position et la mi-largeur de la résonance N^* en plus des facteurs d'homologie. La table III donne le résultat du test de validité de ces hypothèses. Ce test a été effectué selon la nouvelle méthode du χ^2 décrite en annexe II § 7, 5 dont nous rappelons ici les étapes :

a) ajustement des paramètres de l'hypothèse de référence.

b) essai sur un tour d'itération de la formule de la nouvelle hypothèse en introduisant d'une part les paramètres calculés en a), d'autre part les valeurs imposées par cette hypothèse.

Hypothèse A : La résonance n'existe pas.

La forme de l'histogramme doit s'expliquer uniquement par la courbe d'espace de phase et il ne reste que le premier terme de la formule 1.

La valeur χ^2 obtenue, située à plus de 12 écarts standards de la valeur attendue prouve que cette hypothèse soit être rejetée.

Il est intéressant de noter que l'ajustement de la courbe d'espace de phase conduit à une section efficace inférieure à la valeur déduite de la somme des poids, alors que nous avons vu (Ann. II Chap. 2) que quelles que soient les formules mathématiques, la normalisation est automatique. Cette différence vient du fait que la démonstration est valable pour une statistique sans poids, alors qu'ici nous devons faire intervenir dans le calcul les quantités σ_x^2

Le χ^2 de la distribution s'écrit (Ann. II Chap. V formule 57) :

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(Nk - a f_{xk})^2}{\sigma_x^2 a f_{xk}}$$

son minimum se produit pour :

$$a = \frac{\sum \frac{Nk}{\sigma_x^2}}{\sum \frac{f_{xk}}{\sigma_x^2}}$$

Si σ_x^2 est égal à 1 dans toutes les bandes, nous avons :

$$a = \sum Nk / \sum f_{xk}$$

et d'après la normalisation de f on retrouve $a = \Sigma N = 3,9 \text{ mb.}$

Le terme σ_x^2 peut perturber ce résultat, d'autant plus que l'hypothèse s'écarte d'avantage de la distribution expérimentale, au contraire si la courbe s'en éloigne peu, σ_x^2 est sensiblement proportionnel à N_k donc à f_{x_k} et son effet disparaît dans les calculs.

Par conséquent la normalisation sera d'autant meilleure que les hypothèses seront plus vraisemblables. Il est normal que nous ne l'ayions pas obtenue ici.

Hypothèse B : Il n'y a pas de fond, la résonance N^* est seule.

La formule 1 se réduit à

$$\frac{d\sigma}{dM^2} = a_{N^*} f_{N^*}^2$$

La normalisation obtenue est meilleure puisque la courbe s'adapte assez bien à l'histogramme, et la valeur du χ^2 montre que cette hypothèse est vérifiée à 30% près.

Hypothèse C : Le fond et la résonance sont présents, mais il n'y a pas d'interférence.

Les termes a_1 et a_2 de la formule (1) sont nuls a priori.

Le χ^2 général est très voisin du précédent et nous ne pouvons choisir entre les hypothèses avec et sans fond ; du point de vue mathématique la valeur négative du terme de fond signifie que notre répartition expérimentale a moins d'événements sur les ailes qu'une forme de Breit-Wigner.

Hypothèse D : Elle est la plus complète, mais l'écriture détaillée du terme $2 a_2 I_m \{f_0^* f_{N^*}\}$ montre que si nous laissons les six paramètres libres a_0 , a_{N^*} , a_1 , a_2 , M_{N^*} , η_{N^*} , celui-ci donne une contribution indiscernable du second terme de la formule (1).

Pour éviter l'indétermination du système de Cramer dans le calcul des paramètres nous supprimons ce terme que l'on ne peut de toute façon obtenir.

Résultats des tests.

Nous obtenons (cf. table III) une très forte évidence de présence de la résonance puisque la probabilité qu'elle n'existe pas est inférieure à 10^{-18} . Les tests effectués montrent que les résultats demeurent compatibles à un écart près avec l'hypothèse qu'il n'y a pas de fond et la forme de l'histogramme s'explique uniquement par une résonance N^* . Ce résultat surprenant a priori est vérifié par la valeur de l'incertitude

sur la mesure de l'intensité du fond. Si nous devons donner à celle-ci une valeur maximum à deux écarts standards de la valeur 0 trouvée il faudrait proposer 0,6 mb valable dans les deux hypothèses avec et sans interférence du fond avec la résonance (remarquons que l'amplitude du terme d'interférence est très petite).

Comme la contribution négative du fond n'a pas de sens, nous devons considérer la valeur négative a_0 comme une amélioration mathématique pour diminuer les ailes de la courbe de la formule de Breit et Wigner et elle est compensée dans le calcul de normalisation par une augmentation du terme a_{N^*} . Ces deux termes pris séparément n'ont pas de sens physique et la résonance N^* est représentée par l'ensemble des deux fonctions. (fig.21).

Sur la table II, nous voyons que la section efficace, calculée par ajustement des courbes est la même dans les 3 essais B, C, et D et égale à $\sigma_{N^*} = 3,6 \pm 0,5$ mb.

mais nous ne pouvons avoir entièrement confiance en cette valeur puisque la normalisation dépend de la répartition des événements dans l'histogramme par l'intermédiaire du terme σ_x^2 . Une meilleure information nous est donnée directement par la somme des poids de l'échantillon, ce qui nous l'avons vu, conduit à une section efficace de :

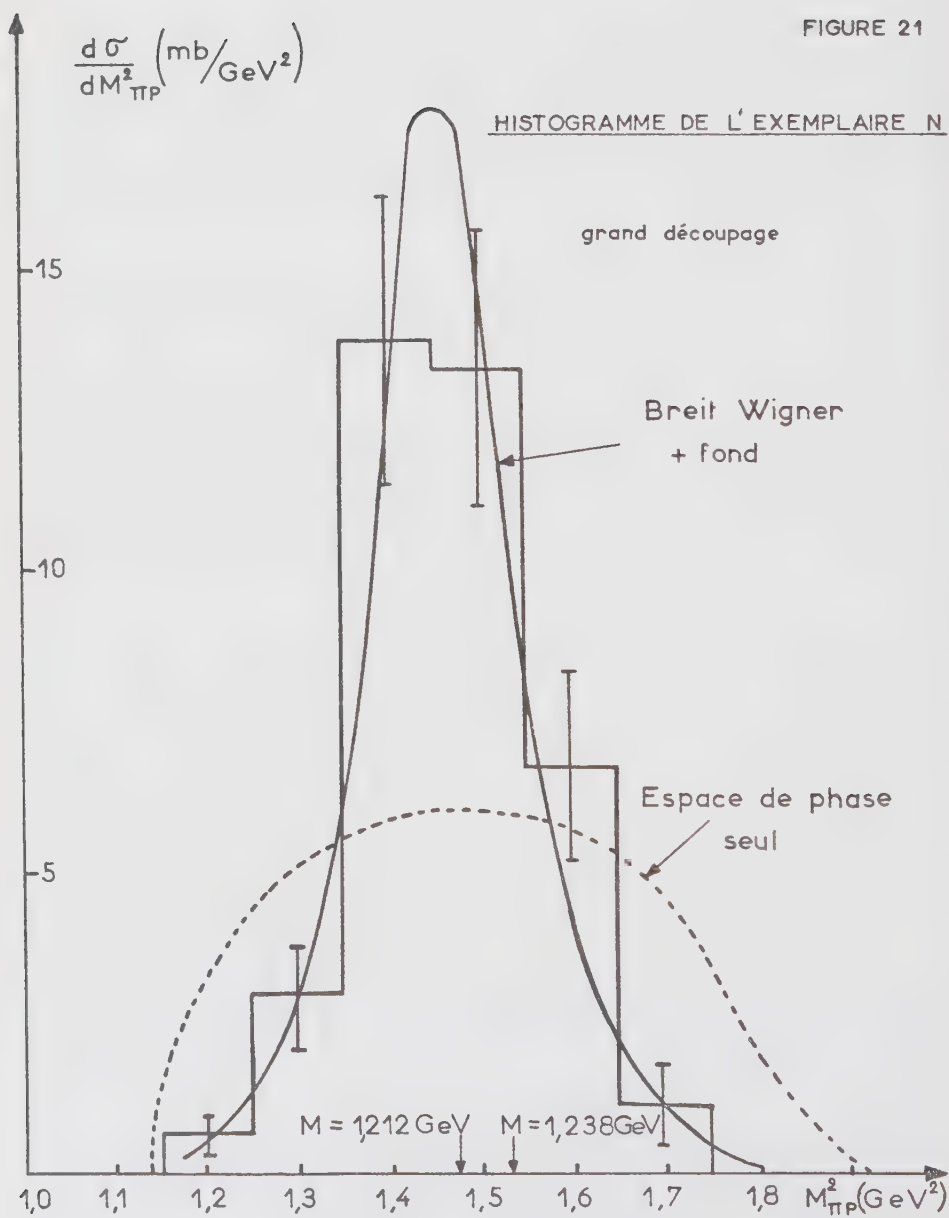
$$\sigma_{N^*} = 3,9 \pm 0,4 \text{ mb.}$$

La valeur que nous obtenons pour la position de cette résonance :

$$M_{N^*} = 1212 \pm 8 \text{ MeV}$$

n'est pas compatible avec les valeurs déjà publiées en général de 1238 MeV¹⁰. Ces résultats ont été souvent obtenus par voie électronique, à partir d'une analyse en déphasage et mesurés à l'endroit où le déphasage entre les ondes incidentes et émergentes passe par $\pi/2$. Ce point correspond sur la courbe de section efficace¹¹ de diffusion élastique $\pi + p$ au point de contact avec la courbe $8\pi\chi^2$, ce qui a lieu pour une énergie cinétique du π incident dans le laboratoire de 197 MeV. Notre valeur concorde beaucoup plus avec celle obtenue en prenant pour valeur de la résonance, le point maximum de la courbe à $T\pi(\text{lab}) = 180$ MeV qui correspond à une masse de 1215 MeV. La valeur trouvée ici est en excellent accord avec celle observée à Berkeley par un groupe de chambre à bulles¹² étudiant la même réaction inélastique à une impulsion de K^+ de 1,96 GeV/c. Notre pic est situé à trois écarts standards de 1238 et une seconde raison du maintien du terme d'interférence avec le fond dans la formulation mathématique est de s'assurer que sa contribution n'augmente pas l'imprécision sur la position du pic et n'explique pas le déplacement par une grande barre d'erreur.

FIGURE 21



La largeur obtenue de 72 ± 13 MeV ne concorde pas avec celle publiée par GREGORY¹⁰ (145 MeV), mais est en bon accord avec la valeur de ROOS⁸ (90 ± 20 MeV).

Nous avons cherché si la divergence ne résulte pas d'une erreur de champ magnétique ou d'impulsion de la manière suivante :

La moyenne de masse $\pi\pi$ obtenue à partir des sorties du programme GRIND (1213,1) est peu différente de la moyenne théorique (1214) calculée par une formule de Breit et Wigner centrée sur 1212 et pondérée par l'espace de phase. En centrant le pic sur 1238 cette moyenne théorique devient 1235 ce qui correspond à une variation de 17% . L'exploitation de nos événements par le programme GRIND en diminuant l'induction magnétique de la chambre de 5% conduit à une diminution relative de 4% de masse moyenne.

Pour expliquer le décalage de notre valeur (1212) par rapport à la valeur (1238) citée habituellement, il aurait fallu une erreur systématique sur le champ magnétique de 20%.

D'autre part, si nous changeons l'impulsion initiale de 4%, nous obtenons une valeur moyenne déplacée de 1% . Ce déplacement est très faible car le programme fait une balance d'impulsion avant de sortir des résultats ; pour centrer notre pic sur 1238, il faudrait une variation de 70% de l'impulsion.

Ces erreurs (20% pour le champ magnétique, 70% pour l'impulsion) sont tout à fait exclues.

5) Etude du diagramme de Dalitz.

Pour cette étude nous avons découpé l'ellipse en 51 rectangles élémentaires, et nous avons ajusté différentes formules à cet histogramme à deux dimensions, construit avec la totalité des événements de l'expérience.

Les fonctions proposées doivent rendre compte de toutes les résonances possibles ainsi que de leurs interférences.

a) Analyse du K^*

Admettons d'abord que nous n'ayons pas de résonance $K\rho$, ni de résonance $K\pi_{730}$. Le travail fait à propos du N^* a montré que nous n'avions pas de fond, donc la formule la plus générale est composée de deux termes de Breit et Wigner et de leur interférence.

Pour améliorer le formalisme mathématique nous avons ajouté un terme de fond, sans interférence avec les deux résonances, ce qui diminue les ailes du N^* et modifie éventuellement les termes de la matrice d'erreur

d'où :

$$\frac{d^2 \sigma}{dM^2_{p\pi} \cdot dM^2_{K\pi}} = a_0 |f_0|^2 + a_{N^*} |f_{N^*}|^2 + a_{K^*} |f_{K^*}|^2 + 2 a_1 \operatorname{Re} \left\{ f_{N^*}^* f_{K^*} \right\} + 2 a_2 \operatorname{Im} \left\{ f_{N^*}^* f_{K^*} \right\} \quad (2)$$

Les définitions des fonctions f sont analogues à celles données lors de l'étude du N^* pur.

$$f_0 = \sqrt{k_0 \cdot \theta} (M^2_{p\pi}, M^2_{K\pi})$$

$$f_{N^*} = \sqrt{k_{N^*} \cdot \theta} \frac{1}{M^2_{p\pi} - M^2_{N^*} - i \eta_{N^*}}$$

$$f_{K^*} = \sqrt{k_{K^*} \cdot \theta} \frac{1}{M^2_{K\pi} - M^2_{K^*} - i \eta_{K^*}}$$

Il n'est pas nécessaire, dans ce calcul, de laisser la position et la largeur du N^* libres puisque ces quantités ont été déterminées précédemment. La statistique est trop faible pour permettre une détermination précise de la position et de la largeur du K^* , nous pouvons seulement mesurer son intensité de production, en laissant ces quantités fixes et égales aux valeurs publiées récemment. ⁸

Nous avons retenu

$$M_{N^*} = 1212 \text{ MeV}$$

$$\eta_{N^*} = 2 M_{N^*} \frac{\Gamma_{N^*}}{2} \text{ avec } \Gamma_{N^*} = 72 \text{ MeV}$$

$$M_{K^*} = 888 \text{ MeV}$$

$$\eta_{K^*} = 2 M_{K^*} \frac{\Gamma_{K^*}}{2} \text{ avec } \Gamma_{K^*} = 50 \text{ MeV}$$

Les différentes hypothèses simplificatrices sont les suivantes :

A) Le N^* est seul, le K^* n'existe pas.

Ce calcul sert uniquement au test de l'hypothèse suivante.

B) Le K^* et le N^* , existent sans interférer.

C) Le K^* et le N^* , existent et interfèrent.

La table IV présente les résultats numériques des sections efficaces de production des deux résonances ainsi que l'amplitude des termes d'interférence, la table V, les probabilités correspondant aux hypothèses B et C.

L'examen de cette dernière table permet de conduire à une forte

évidence en faveur de l'existence du K^* , puisque le χ^2 de sa non existence est de 15,7 pour une valeur attendue de 1.

Nous pouvons vérifier ce résultat à partir de l'échantillonnage $K = N - D'$ dont on trouve l'histogramme fig. 22. Si le K^* n'existe pas toutes les bandes doivent avoir une hauteur nulle. Le χ^2 pour obtenir l'exemplaire K au lieu de 0, est de 7,6 pour une valeur attendue de 1.

Par contre, la présence d'interférence entre les résonances $K^* - N^*$ est plus difficile à prouver non pas parce que les valeurs numériques des coefficients a_1 et a_2 sont petites mais parce que les erreurs statistiques sont grandes.

Nous pouvons évaluer le taux d'interférence comme étant le rapport de l'amplitude maximum possible :

$$R = \sqrt{\frac{a_1 \times a_2}{a_{N^*} \cdot a_{K^*}}} = 0,17$$

Le χ^2 général le plus faible est obtenu avec l'hypothèse C et ce sont les valeurs déduites de ce calcul que nous retiendrons.

Les sections efficaces trouvées sont compatibles avec les résultats de l'opération de conjugaison :

Opération de conjugaison	Diagramme de Dalitz
Exemplaire N $\sigma_{N^*} = 3,9 \pm 0,4$ mb	$\sigma_{N^*} = 4,2 \pm 0,5$ mb
Exemplaire K $\sigma_{K^*} = 0,7 \pm 0,3$ mb	$\sigma_{K^*} = 0,9 \pm 0,3$ mb

La figure 23 représente l'allure de la fonction (2) complète. Les deux termes d'interférence ont une valeur moyenne presque nulle, et l'effet est tantôt destructeur, tantôt constructeur ; la ligne neutre est un arc d'hyperbole pour le premier terme et une droite pour le second.

b) Analyse de la résonance K^*_{730}

La résonance $K\pi$ de masse 730 MeV a été annoncée par différents laboratoires et pour vérifier sa présence éventuelle dans nos résultats nous pourrions refaire le même calcul en changeant la masse centrale de la formule de Breit-Wigner, et en prenant pour largeur la largeur d'une bande d'histogramme ; mais ce procédé n'est pas valable car les valeurs initiales sont pour ce test beaucoup trop dépendantes de la présence du K^*_{888} voisin.

Les phénomènes sont beaucoup plus nets si nous coupons la surface à $0,70 \text{ GeV}^2$ en $M^2_{K\pi}$, et optimisons la formule 2 sur la partie inférieure de cette surface.

FIGURE 22

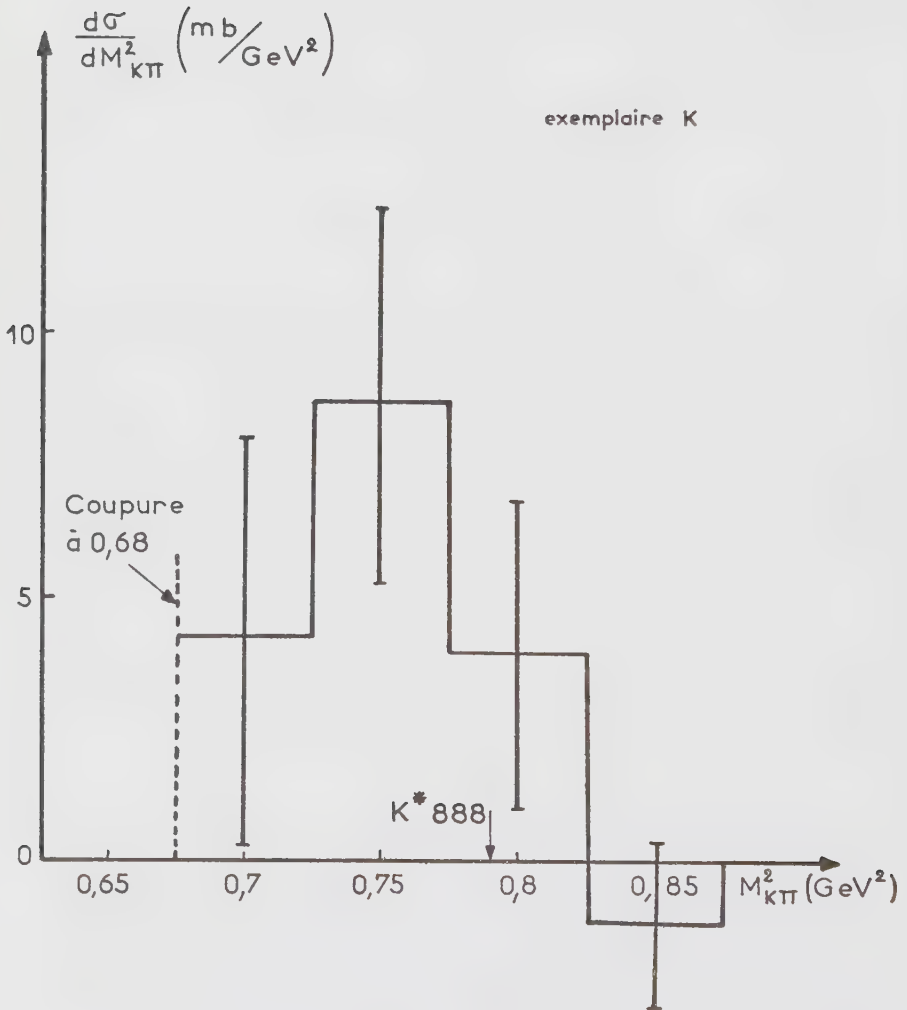
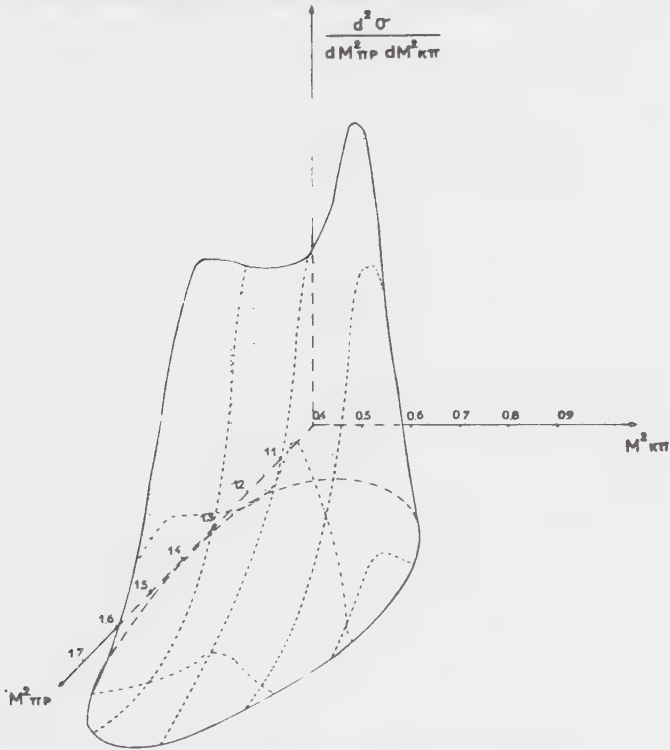


FIGURE 23

SURFACE ADAPTEE AU DIAGRAMME DE DALITZ



$$I = a_p |f_p|^2 + a_N |f_N|^2 + a_K |f_K|^2 + 2a_1 \operatorname{Re}\{f_{\pi^0} f_K\} + 2a_2 \operatorname{Im}\{f_{\pi^0} f_K\}$$

Nous trouvons bien entendu un fond négatif et une section efficace du N^* de $4,0 \text{ mb} \pm 0,4 \text{ mb}$, valeur compatible avec celle obtenue à partir de l'échantillon N^* pur. Ces deux processus sont équivalents puisque tous deux reviennent à ne considérer qu'une partie de la surface de Dalitz. Les résultats numériques sont différents car pour l'un la coupure est à $0,68 \text{ GeV}^2$ et pour l'autre à $0,70$, or à ces ordonnées l'influence du K^*_{888} se fait encore sentir.

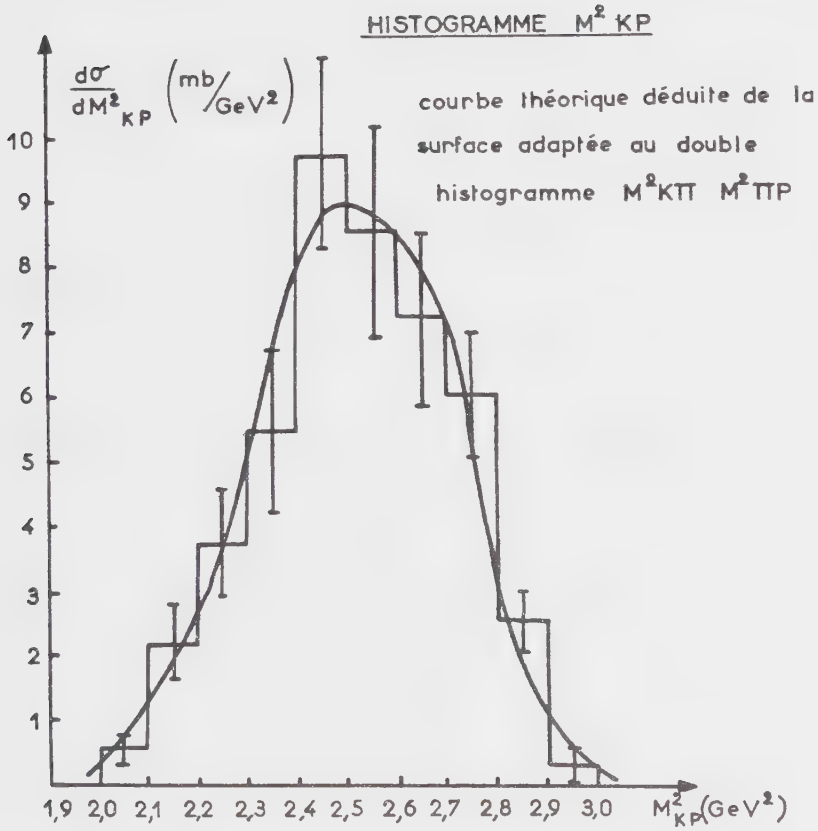
Avec ces valeurs initiales nous testons la présence de la résonance K^{**} et obtenons une probabilité de 40% de non existence. Ce chiffre permet de conclure que cette résonance n'intervient pas dans notre réaction ou que son amplitude n'émerge pas des fluctuations statistiques. En prenant comme limite supérieure de la section efficace deux écarts types, nous obtenons : $\sigma_{K^*_{730}} = 0,3 \text{ mb}$.

3) Présence d'une éventuelle résonance K_p .

La figure 24 montre l'histogramme des masses carrées K_p , la courbe tracée est la projection sur l'axe K_p de la surface d'équation (2) ajustée précédemment. Nous ne pouvons tirer aucune conclusion de cet histogramme quant à la présence d'un pic éventuel et le χ^2 de cet ajustement (48/46) indique que l'on peut difficilement l'améliorer.

Ainsi aucune résonance dans le système K nucléon n'est nécessaire pour interpréter les résultats.

FIGURE 24



VI. REMARQUES.

1) Validité de l'opération de conjugaison.

Selon deux méthodes différentes nous avons étudié la résonance N^* . La première méthode consiste à éliminer les événements situés dans la zone du K^* et à repeupler cette zone par l'opération de conjugaison. La seconde réside dans l'ajustement au diagramme de Dalitz d'une formule double de Breit et Wigner. La première est la plus précise et elle nous a conduit aux déterminations de position et de largeur de cette résonance. Cette opération ne peut être effectuée qu'avec les conditions suivantes :

- la résonance se désintègre avec une parité déterminée.
- Dans l'expérience nous n'avons pas décelé de K^* 730 et aucune autre résonance que celle de 888 MeV.
- Le fond peut avoir deux composantes de parité égale ou opposée à celle du N^* vis à vis de l'opération de conjugaison, mais il ne faut pas d'interférence importante entre le N^* et la partie du fond de parité opposée pour ne pas détruire la symétrie centrale supposée qui légitime l'opération. Nous avons vérifié cette proposition par l'étude de l'exemplaire S. Celui-ci consiste à retirer la zone du K^* et à supprimer les événements qui par conjugaison viendraient dans la zone du K^* .

Ceci n'est possible que sur S car l'exemplaire complet du N^* avec ses événements doubles présente une symétrie artificielle. Pour faire cette vérification, nous mesurons la moyenne statistique de $\cos \theta^{**}$, θ angle du méson π dans le s. c. m. du N^* avec respectivement quatre directions, celle du proton incident, celle du K^0 sortant, et leurs perpendiculaires dans le plan de production du N^* ; au maximum nous avons trouvé $\cos \theta = 0,1 \pm 0,1$ il n'y a donc pas d'interférence entre un fond de parité opposée au N^* et le N^* et d'après l'analyse de l'exemplaire N il n'existe pas non plus d'interférence pour un fond de même parité (en effet en doublant une partie des événements, l'opération maintient la contribution du fond de même parité que le N^* .) Mais de toute façon, ce fond n'invaliderait pas l'opération même par interférence.

2) Absence de fond.

L'un des résultats importants de l'étude du N^* par l'opération de conjugaison est l'absence de fond. La section efficace des processus incohérents est au maximum égale à 0,6 mb. Ceci est à rapprocher du fait que nous n'avons trouvé aucun événement avec production de π^0 supplémentaire.

$$K^+ + p \rightarrow K^0 + p + \pi^+ + \pi^0$$

La section efficace de cette réaction à 4 corps est inférieure à 1 événement pour 227 soit 0,017 mb.

** Calcul effectué par P. Eberhard.

Nous calculons les espaces de phases* ϕ_3 et ϕ_4 des réactions à 3 et 4 corps que nous pouvons exprimer en unité de masse de méson π

$$\phi_3 = 8,48 m_\pi^2$$

$$\phi_4 = 3,08 m_\pi^4$$

Prenons comme rayon d'interaction dans les deux cas l'inverse d'une masse de π et admettons en très grossière approximation que l'élément de matrice de transition de la réaction à quatre corps et de l'ordre de grandeur de celui de la réaction à trois corps divisé par une masse de π , nous avons les expressions :

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{\phi_3}} \left| T_3 \right|^2$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{\sqrt{\phi_4}} \left| T_4 \right|^2$$

et le rapport $\frac{\phi_3}{\phi_4} = 2,73$

Nous pouvons déduire la valeur maximum de la section efficace du fond de la réaction à trois corps de celle à 4 corps par le rapport des espaces de phase

$$\sigma_3 = 0,05 \text{ mb}$$

valeur bien inférieure à la section efficace totale, ce qui confirme par une autre méthode que le fond est pratiquement nul.

* Calcul fait par M. Pripstein.

VII. CONCLUSIONS.

De l'étude de la réaction $K^+ + p \rightarrow K^0 + \pi^+ + p$ à une énergie totale dans le s. c. m. de 1,859 GeV, nous tirons les conclusions suivantes :

- la section efficace totale de la réaction est $4,6 \pm 0,3$ mb.

- les productions du N^* et du K^* dominent la réaction. Le fond, s'il existe, donne une contribution à la section efficace totale inférieure à 0,6 mb. De plus nous n'avons trouvé aucun événement à 2π dans l'état final. En effet avec une énergie aussi peu élevée, dans le s. c. m. la présence de tels événements ne pourrait être décelée que si aucune résonance n'existait dans l'état final.

- La section efficace de production N^* est $3,9 \pm 0,5$ m et celle du K^* : $0,9 \pm 0,30$ mb.

Cette dernière valeur est comparable au chiffre ($1,35 \pm 0,3$ mb) obtenu à la même énergie pour la réaction $K^- + p \rightarrow K^{*-} + p$ ¹²

La valeur de la masse de la résonance N^* que nous avons mesurée, 1212 ± 8 MeV, est inférieure à celle qu'ont trouvée jusqu'ici la plupart des auteurs ¹⁰ et la largeur de cette même résonance $73 \text{ y } 13$ MeV, est différente de la valeur donnée par le compte rendu du CERN ¹⁰ mais est en accord avec celle avancée par Roos⁸.

- La résonance K^*_{730} a une intensité négligeable.

- Enfin il n'est pas nécessaire d'envisager une résonance $K^0 p$ dans l'état final pour expliquer nos résultats.

Table 1. Réactions apparaissant sous l'aspect $2B + V^0$

Réaction	Configuration dans l'état final	Energie totale de seuil dans le s. c. m. (en GeV)
$K^0 p \pi^+$ (1)	sans résonance (1a)	1.576
	$K^{*+}(730) + p$ (1b)	1.668
	$N^{*++}_{3/2 \ 3/2} + K^0$ (1c)	1.736
	$K^{*+}(888) + p$ (1d)	1.826
$K^+ p \rightarrow K^0 p \pi^+ \pi^0$ (2)	sans résonance (2a)	1.711
	$N^{*++}_{3/2 \ 3/2} + K^{*0}(730)$ (2b)	1.968
	$N^{*++}_{3/2 \ 3/2} + K^{*0}(888)$ (2c)	2.126
$K^0 n \pi^+ \pi^+$ (3)		1.717
$K^0 p \pi^+ \pi^0 \pi^0$ (4)		1.846

**Table II. Détermination des Paramètres par ajustage des courbes
à l'histogramme de masse carrée πp .**

Hypothèses Paramètres à optimiser	A fond seul pas de résonance	B résonance seule	C résonance + fond	D résonance + fond + interférence
a_0	$3,1 \pm 0,3$ mb	-	$-0,6 \pm 0,3$ mb	$-0,4 \pm 0,3$ mb
a_{N^*}	-	$3,6 \pm 0,5$ mb	$4,2 \pm 0,5$ "	$4,0 \pm 0,7$ "
a_1	-	-	-	$-0,005 \pm 0,1$ "
M_{N^*}	-	1209 ± 8 MeV	1209 ± 8 MeV	1212 ± 8 MeV
Γ_{N^*}	-	31 ± 5 "	39 ± 8 "	$36 \pm 6,5$ "
χ^2 général de l'hypothèse	127	35	35	35
valeur attendue du χ^2	29	27	26	25
Section efficace de la résonance				
$a_0 + a_{N^*}$	$3,1 \pm 0,3$ mb	$3,6 \pm 0,5$ mb	$3,6 \pm 0,5$ mb	$3,6 \pm 0,8$ mb

Table III
Test au χ^2 des différentes hypothèses pour l'étude du N^* .

Hypothèse testée	pas de N^*	pas de fond	pas de fond, pas de termes d'inter- férence.
Formule du test	B/A	C/B	D/B
Formule * de référence			
Paramètres fixés par l'hypothèse	$a_{N^*} = 0$	$a_0 = 0$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0$
χ^2 obtenu	83	2,6	2,6
χ^2 attendu	1	1	2
Probabilité	$< 10^{-18}$	15 %	30 %

*La formule de référence est celle utilisée pour optimiser les paramètres non imposés par l'hypothèse.

Table IV.

Résultat de l'étude du diagramme de Dalitz.

Hypothèse paramètres	A N^* seul	B $N^* + K^*$	C $N^* + K^* +$ termes d'in- terférence	D N^* dans 1/2 ellipse	E $N^* + K^*_{730}$ dans 1/2 ellipse
$a_0 + a_{N^*}$	$4,5 \pm 0,5 \text{ mb}$	$3,8 \pm 0,45 \text{ mb}$	$4,2 \pm 0,5 \text{ mb}$	$4,0 \pm 0,4 \text{ mb}$	$4,2 \pm 0,5$
a_{K^*888}		$0,073 \pm 0,26$	$0,91 \pm 0,32$		
a_1			$-0,20 \pm 0,30$		
a_2			$-0,70 \pm 0,42$		
a_{K^*730}					$-0,20 \pm 0,15$
χ^2 général de l'hypothèse	70	53	48	20	17
χ^2 attendu	49	48	46	25	24

Table V.

Tests au χ^2 des différentes hypothèses pour l'étude du diagramme de Dalitz.

Hypothèse testée	pas de K^*_{888}	existence du K_{888} pas de termes d'interférence	pas de K^*_{730}
Formule test Formule de référence	B A	C B	E D
Paramètres fixés par l'hypothèse	$a_{K^*} = 0$	$a_1 = a_2 = 0$	$a_{K^*730} = 0$
χ^2 obtenu χ^2 attendu	15,7 1	3,3 2	0,75 1
Probabilité	10^{-4}	20 %	40 %

REFERENCES

- 1 - J. Duboc, N. H. Duong, P. Eberhard, R. George, V. P. Henri, F. Levy, J. Poyen, M. Pripstein, J. Crussard, A. Tran. Physics Letters 6 233 (1963).
- 2 - Un texte présentant l'ensemble des résultats de l'expérience a été proposé pour publication dans "Physical Review".
- 3 - D. Berley, J. Duboc, N. H. Duong, P. Eberhard, R. George, V. P. Henri, J. Poyen, J. F. Allard, C. Bohy, E. Boldt, L. Jauneau, G. Kayas, D. Morellet et D. Vaguelsy. Faisceau Séparé de Mésons K^+ de 0,7 à 1,3 GeV/c. Nuclear Instruments and Methods. (Vol 24 (1963) 2 133)
- 4 - Walter H. Barkas and Arthur H. Rosenfeld, Lawrence Radiation. Laboratory Report UCRL - 8030 Rev., 1961.
- 5 - GRIND 709 Kinematics Program Manual, CERN - Track Chamber Data Processing.
- 6 - D. Berley, E. Boldt, J. Crussard, J. Duboc, P. Eberhard, R. George, V.P. Henri, F. Levy, and J. Poyen, C. R. Acad. Sc. 255 890 (1962).
- 7 - W. Graziano and S. G. Wojcicki, Phys. Rev. 128 1868 (1962).
- 8 - Matts Roos, Reviews of Modern Physics, 25, 314 (1963).
- 9 - Philippe Eberhard and Morris Pripstein, Phys. Rev. Letters, 10, 351, (1963).
- 10 - B.P. Gregory, *Proceedings of the international Conference on High-Energy Nuclear Physics, Geneva 1962*. (CERN Scientific Information Service, Geneva, Switzerland, 1962), p. 783.
- 11 - N.P. Klepikov, V.A. Meshcheryakov and S.N. Sojolov, JINR-D-584 (1960).
- 12 - Sula Goldhaber, Talk Presented at the Athens Topical Conference on Recently Discovered Resonant States, 1963.
- 13 - P. Eberhard et F. Levy, Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire, rapport interne n° 6304.

ANNEXE I.

Calcul de la section efficace

- Appelons σ_i la section efficace de la réaction étudiée
- σ_I la section efficace des autres interactions
- L_D la longueur de désintégration
- N_0 le nombre de mésons K^+ incidents

Si nous mesurons les sections efficaces en millibarns et les longueurs en mètres, le nombre de mésons K^+ restant après un parcours de longueur x dans l'hydrogène est égal à :

$$N_x = N_0 e^{-x \left(\frac{\sigma_i + \sigma_I}{282} + \frac{1}{L_D} \right)}$$

posons :

$$\frac{\sigma_i + \sigma_I}{282} + \frac{1}{L_D} = \frac{1}{X}$$

Le nombre de K^+ disparus à l'intérieur du volume utile de longueur L est:

$$\Delta N = N_0 - N_L = N_0 \left(1 - e^{-\frac{L}{X}} \right)$$

La longueur L est de l'ordre de 0,24 m et la quantité X de 5,5 m, aussi nous pouvons développer l'exponentielle au premier ordre et écrire

$$\Delta N = \frac{N_0 L}{X} = \frac{N_0 L \sigma_i}{282} + \frac{N_0 L \sigma_I}{282} + \frac{N_0 L}{L_D}$$

Le premier terme représente la contribution des processus cherchés c'est-à-dire le nombre ν d'interactions inélastiques avec échange de charge, le troisième représente le nombre total K de désintégrations,

donc :

$$\frac{\frac{\sigma_i}{282}}{\nu} = \frac{\frac{1}{L_D}}{K}$$

d'où la section efficace :

$$\sigma_i = \frac{282 \nu}{L_D K}$$

METHODES STATISTIQUES

I - GENERALITES SUR LA METHODE DES MOINDRES CARRES

- 1) Définitions.
- 2) Application à la statistique.

II - DISTRIBUTIONS NON NORMEES.

III - FORMALISME DE L'HISTOGRAMME

- 1) Calcul de l'espérance mathématique de η_x
- 2) Fonction caractéristiques.

IV - METHODE DE RESOLUTION

- 1) Linéarisation des équations.
- 2) Calcul de $\bar{H}$.
- 3) Calcul de $\bar{U}$.
- 4) Matrice d'erreur.

V - STATISTIQUE AVEC POIDS

- 1) Calcul de $\bar{U}$
- 2) Poids d'un évènement.
- 3) Calcul de $\eta_p \eta_p$, et de $\sigma^2 \eta_p$
- 4) Fonction $f(x_1)$
- 5) Fonction caractéristique.

VI - METHODE DE CALCUL

- 1) Formalisme pratique.
- 2) Evaluation de σ^2_x .
 - a) Expression théorique.
 - b) Expression calculable.

VII - METHODE CHI CARRE

- 1) Définitions.
- 2) Propriétés du χ^2 .
- 3) Nouvelle méthode de χ^2

VIII - METHODE DE CALCUL

- 1) Formules à programmer.
- 2) Utilisation du programme.

I - GENERALITES SUR LA METHODE DES MOINDRES CARRES

1) Définitions

Soit ζ_n la mesure d'une grandeur obtenue par l'analyse de l'évènement de numéro n d'une expérience, N étant le nombre total d'évènements. L'ensemble des résultats se représente par le secteur colonne $|\zeta|$. Appelons $|z|$ la variable dont $|\zeta|$ peut prendre certaines valeurs aléatoires. La probabilité pour que les $|\zeta|$ prennent les valeurs $|z|$ dans les limites de l'hypervolume dz dépend de $|z|$ et aussi d'un ensemble de L paramètres caractéristiques de l'expérience.

Soient $|a|$ les variables représentant ces paramètres et $|\alpha|$ leurs valeurs calculées aléatoires.

Nous pouvons écrire la probabilité que $|\zeta| = |z|$ sous la forme

$$P |z| |a| dz \quad (1)$$

Pour ajuster au mieux les valeurs mesurées aux résultats expérimentaux $|\zeta|$ nous devons chercher les valeurs des paramètres $|a|$ qui rendent cette probabilité maximum et pour cela résoudre le système d'équations

$$\frac{\partial P}{\partial a} (|z| |a|) = 0 \quad (2)$$

L'équation (2) définit $|\alpha|$, pour connaître la précision de nos déterminations, nous pouvons construire le vecteur $|\Delta|$ des écarts à la valeur vraie

$$|\Delta| = |\alpha| - |a| \quad (3)$$

$$\text{et la matrice d'erreur } W^2 = \overline{\Delta \Delta^T} \quad (4)$$

2) Application à la statistique

Chaque évènement ayant une probabilité individuelle indépendante, nous admettons que la probabilité totale d'avoir $|\zeta|$ centré sur $|z|$, est le produit des probabilités individuelles. Soit:

$$P |z| |n| dz = \prod_n P |z_n| |a| \delta_{z_n} \quad (5)$$

Nous obtenons le maximum de $P |z| |a|$ pour les mêmes valeurs des paramètres que celles qui rendent son logarithme maximum, aussi nous remplaçons le système d'équations (2) par le suivant qui est plus simple

$$\frac{\partial}{\partial a} \text{Log } P |z| |a| = 0 \quad (6)$$

Soit:

$$\sum_n \frac{1}{P |z_n| |a|} \left| \frac{\partial P}{\partial a} (|z_n| |a|) \right| = 0 \quad (7)$$

Nous obtenons ainsi L équations que nous schématisons en :

$$|U| = 0 \quad (8)$$

II - DISTRIBUTIONS NON NORMEES

- Mesure du paramètre d'intensité

Si la normalisation au nombre d'évènements n'est pas faite automatiquement par la formulation mathématique de la probabilité, ce paramètre d'intensité doit être mesuré comme les autres paramètres de l'expérience.

Supposons que le nombre des évènements N soit distribué selon une loi de Poisson autour de son espérance mathématique a_0 considérée comme un paramètre à déterminer.

$$P_0(N) = \frac{a_0^N}{N!} e^{-a_0} \quad (9)$$

La probabilité totale d'obtenir l'ensemble des résultats est le produit des probabilités P_0 et P

$$P' = P_0(N) \prod_n P |z_n| |a| \quad (10)$$

La substitution de P' à P dans l'équation (6) conduit à

$$\frac{\delta}{\delta a} \text{Log } P' = \frac{\delta}{\delta a_0} \text{Log } P_0 + \frac{\delta}{\delta a_1 (1 > 1)} \sum_n \text{Log } P |z_n| |a| \quad (11)$$

Le premier terme conduit à la recherche du maximum de P_0 dont la solution est

$$a_0 = N$$

et les autres termes sont identiques aux équations (7)

Nous voyons que la recherche du maximum de la probabilité totale P' conduit automatiquement à la normalisation.

III - FORMALISME DE L'HISTOGRAMME

Choisissons une variable x qui sera l'abscisse de notre histogramme, dans le domaine des z. Nous définirons la hauteur de la bande d'histogramme par la fonction

$$\eta_x = \sum_n \delta |z_n - x| \quad (12)$$

1) Calcul de l'espérance mathématique de η_x

Cette espérance mathématique est égale à l'intégrale sur tout le domaine des variables N et z du produit de η par la probabilité P' d'obtenir nos résultats :

Nous remplaçons P' par sa définition (10) et l'intégration sur N par une somme

$$\bar{\eta}_x = \sum_N \int \sum_n \delta |z_n - x| P_o(N) \pi_n, P |z_n, | |a| dz_n,$$

P_o est indépendant de z_n , et les intégrales des probabilités Pz_n , sont toutes égales à 1 sauf celle pour laquelle $n=n'$ qui vaut P_x

$$\bar{\eta}_x = \sum_N P_o(N) \sum_n P |x| |a|$$

La dernière somme est égale à $N_o P |x| |a|$

$$\bar{\eta}_x = \sum_N N P_o(N) P |x| |a|$$

Le premier facteur est l'espérance mathématique de N qui vaut a_o d'après la formule de Poisson, donc :

$$\bar{\eta}_n = a_o P |x| |a| \quad (13)$$

L'espérance mathématique de la hauteur de l'histogramme est égale au produit de l'espérance mathématique du nombre d'évènements multipliée par la probabilité d'avoir un évènement dans cette bande.

Définissons la fonction

$$r |x| |a| = a_o P |x| |a| \quad (14)$$

En chaque bande nous avons

$$\bar{\eta}_n = r |x| |a| \quad (15)$$

L'équation $y = r |x| |a|$ est l'équation de la courbe qui doit s'adapter à notre histogramme. Pour ajuster cette fonction aux résultats expérimentaux il faut, nous l'avons vu, que les valeurs numériques des paramètres $|a|$ soient celles qui rendent la probabilité P' maximum.

2) Fonction caractéristique

Avec la fonction $r |x| |a|$ nous construisons la fonction caractéristique E par :

$$E = \int (\eta \text{ Log } r - r) dx \quad (16)$$

L'intérêt de cette fonction est que le maximum de E s'obtient par la même condition que le maximum de $\text{Log } P'$

Explicitons E .

$$E = \int \sum_n \delta |z_n - x| \text{Log} (a_o P |x|) - a_o P |x| dx$$

Simplifions le premier terme à l'aide des propriétés de la fonction δ , et réduisons le second à a_0 puisque l'intégrale de la probabilité $P|_x|$ est égale à un.

$$E = \sum_n (\text{Log } a_0 P|_{z_n a} - a_0) \\ = \sum_n \text{Log } P|_{z_n | a} + \text{Log } a_0^N e^{-a_0}$$

Les conditions $\frac{\delta E}{\delta a_1} = 0$ se réduisent bien à

$$\sum_n \frac{1}{P} \frac{\delta P}{\delta a_1} \quad \text{si } l \text{ est supérieur ou égal à } 1.$$

et à $a_0 = N \quad \text{si } l = 0$

IV - METHODE DE RESOLUTION

Les conditions $\frac{\delta E}{\delta a_e} = 0$ s'écrivent :

$$U_1 = \frac{\delta E}{\delta a_1} = \int \left(\frac{\eta}{r} - 1 \right) \frac{\delta r}{\delta a_1} dx = 0 \quad (17)$$

1) Linéarisation des équations :

Pour résoudre le système des L équations, nous pouvons le linéariser en développant chaque terme du vecteur U au premier ordre en fonction des paramètres.

Introduisons la matrice symétrique

$$H_{11'} = - \frac{\delta U_1}{\delta a_{1'}} \quad (18)$$

Notre système à résoudre devient

$$|U_\alpha| = |U_{\alpha_0}| - H |\alpha - \alpha_0| = 0 \quad (19)$$

Partant du vecteur $|\alpha_0|$ des valeurs initiales des paramètres déterminées par le bon sens, nous obtenons les meilleures valeurs $|\alpha|$ par la relation (19) inversée

$$|\alpha| = |\alpha_0| + H^{-1} |U_{\alpha_0}| \quad (20)$$

Pratiquement nous remplaçons dans nos calculs la matrice H par la matrice $\bar{H}|_{\alpha_0}$ souvent plus facile à calculer, dont tous les termes sont égaux à l'espérance mathématique des termes de la matrice H . Cette approximation est l'analogue d'une méthode d'itération à une dimension dans laquelle nous remplacerions la tangente à la courbe par une droite de pente voisine; elle est légitime car ce qui importe c'est d'obtenir $|U_\alpha| = 0$ même si le coefficient de $|\alpha - \alpha_0|$ n'est pas égal à la matrice des dérivées de $|U_\alpha|$.

Les équations 19 et 20 se transforment en

$$|U_{\alpha}| = |U_{\alpha_0}| - \bar{H} |\alpha - \alpha_0| \quad (21)$$

$$|\alpha| = |\alpha_0| + \bar{H}^{-1} |U_{\alpha_0}| \quad (22)$$

Nous ferons autant d'itérations qu'il est nécessaire pour obtenir un écart $|\alpha| - |\alpha_0|$ aussi petit que nous le souhaitons.

2) Calcul de $\bar{H}$

Revenons à la définition de $\bar{H}$.

$$\bar{H}_{11} = - \frac{\delta \bar{U}_1}{\delta a_1} = - \int \left[-\frac{\eta}{r^2} \frac{\delta r}{\delta a_1} \frac{\delta r}{\delta a_1} + \left(\frac{\eta}{r} - 1 \right) \frac{\delta^2 r}{\delta a_1 \delta a_1} \right] dx$$

Sous l'intégrale les seuls termes aléatoires sont les η . Nous voyons que le fait d'utiliser la matrice $\bar{H}$ au lieu de H simplifie beaucoup les calculs, car dans ce cas le second terme est nul $\bar{\eta} = r$ (formule 15) et il reste :

$$\bar{H}_{11} = \int \frac{1}{r} \frac{\delta r}{\delta a_1} \frac{\delta r}{\delta a_1} dx \quad (23)$$

que nous écrivons :

$$\bar{H} = \int \frac{1}{r} \left| \frac{\delta r}{\delta a} \right| \left| \frac{\delta r}{\delta a} \right| dx$$

3) Calcul de $\bar{U}$

Nous vérifions que l'espérance mathématique de U est nulle à partir de la formule 17.

$$\bar{U}_1 = \int \left(\frac{\bar{\eta}}{r} - 1 \right) \frac{\delta r}{\delta a_1} dx = 0$$

Ceci est toujours égal à 0 puisque $\bar{\eta} = r$.

4) Matrice d'erreur

Nous calculons d'abord le vecteur Δ qui par définition vaut :

$$\Delta = |\alpha - a|$$

On peut imaginer que l'on prend comme valeur initiale la valeur vraie a pour aboutir à la valeur α après un tour d'itération.

$$|\alpha| = |a| + \bar{H}^{-1}_{|\alpha|} |U|_a \quad (24)$$

donc

$$|\Delta| = \bar{H}^{-1} |U|_a$$

Portons ceci dans la relation de définition de la matrice d'erreur

$$\mathbb{W}^2 = \Delta \tilde{\Delta} = \bar{H}^{-1} |U_{\alpha 0}| \overline{H^{-1} |U_{\alpha 0}|}$$

La matrice H^{-1} est symétrique et ne contient pas de termes aléatoires.

Il reste donc.

$$\mathbb{W}^2 = \bar{H}^{-1} |U_{\alpha 0}| \overline{|U_{\alpha 0}|} \bar{H}^{-1} \quad (25)$$

Pour continuer le calcul explicitons la quantité $\overline{U \tilde{U}}$ en revenant à la définition de U donnée par la formule 17.

$$\overline{|U| |\tilde{U}|_{11}} = \int \left(\frac{\eta(x)}{r|x||a|} - 1 \right) \frac{\delta r|x||a|}{\delta a_1} dx \int \left(\frac{\eta|x'|}{r|x'||a|} - 1 \right) \frac{\delta r|x'|a|}{\delta a_1} dx'$$

Soit :

$$\overline{|U| |\tilde{U}|_{11}} = \int dx dx' \frac{1}{r|xa| r|x'a|} \overline{(\eta_x - r|xa|)(\eta_{x'} - r|x'a|)} \frac{\delta r|xa|}{\delta a_1} \frac{\delta r|x'a|}{\delta a_1}$$

Le terme sous la barre est égal à la variance de η et s'écrit :

$$\sigma_\eta^2 = \overline{\eta_x \eta_{x'}} - \bar{\eta}_x \bar{\eta}_{x'}$$

Pour calculer $\sigma_{\eta'}^2$ calculons la quantité $\overline{\eta_x \eta_{x'}}$, de la même manière nous avons calculé η_x .

$$\overline{\eta_x \eta_{x'}} = \sum_n \int \sum_{n'} \delta(z_n - x) \delta(z_{n'} - x') P_0(N) \frac{\pi}{n''} P|z_{n''}| |a| dz_{n''}$$

Nous pouvons d'abord sortir P_0 de l'intégrale en $dz_{n''}$ ensuite décomposer cette dernière en deux termes, car toutes les intégrales de probabilités sont égales à 1 sauf celles pour lesquelles $n'' = n$ ou n' .

Si n' est différent de n deux probabilités seront inférieures à 1, et si $n' = n$ une seule

$$\overline{\eta_x \eta_{x'}} = \sum_N P_0 \left[\sum_{n \neq n'} P|x'a| + \sum_n P|x||a| \delta|x - x'| \right]$$

Soit :

$$\overline{\eta_x \eta_{x'}} = \sum_N P_0 \left[(N^2 - N) P|xa| P|x'a| + N P|xa| \delta|x - x'| \right]$$

Nous pouvons simplifier ceci, car d'après l'équation 9

$$\begin{aligned} \sum_N N P_0 &= a_0 \\ \sum_N (N^2 - N) P_0 &= a_0^2 \end{aligned}$$

Si nous remplaçons les quantités a_0 P par la fonction r_{xa} nous obtenons

$$\overline{\eta_x \eta_{x'}} = r_{xa} r_{x'a} + r_{xa} \delta_{|x-x'|} \quad (27)$$

A l'aide de ce résultat, nous pouvons simplifier les équations nécessaires au calcul de la matrice $\mathbb{W}^2$.

D'abord

$$\sigma_{\eta}^2 = r_{|xa|} \delta_{x-x'} \quad (28)$$

puisque

$$\eta_x = r_{|x|} |a|$$

Portons ceci dans la relation (26, nous obtenons

$$\overline{|U \widetilde{U}|} = \int dx dx' \frac{1}{r_{|x'a|}} \delta(x-x') \frac{\delta r}{\delta a_1} |xa| \frac{\delta r}{\delta a_1} |x'a|$$

L'intégration en x' disparaît à cause de la fonction δ , donc :

$$\overline{|U \widetilde{U}|} = \int \frac{1}{r_{|xa|}} \frac{\delta r}{\delta a_1} \frac{\delta r}{\delta a_1} dx$$

Ce qui conduit au résultat fort simple, par comparaison avec 23

$$\overline{U \widetilde{U}} = \bar{H} \quad (29)$$

et

$$\mathbb{W}^2 = \bar{H}^{-1} \quad (30)$$

Remarquons que la fonction $r_{|x|} |a|$ est proportionnelle à N et que la matrice H aussi, ceci entraîne que la matrice d'erreur $\mathbb{W}^2$ est inversement proportionnelle à N .

Les termes diagonaux de cette matrice représentant le carré de l'erreur de chaque paramètre l'erreur sur chacun diminue comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$, lorsque la statistique augmente.

V - STATISTIQUE AVEC POIDS

Supposons que la probabilité de trouver les événements dans un état cinématique donné soit le produit de trois probabilités $r_p |x_1a|$ P_{x_2} , et $P_{|x_1x_2|}$

$r_p |x_1a|$ est la probabilité physique indépendante des conditions expérimentales. Elle est identique à la fonction $r_{|xa|}$ du § III et son écriture mathématique est définie par des hypothèses sur la nature de la réaction : formule de Breit et Wigner, répartition angulaire en $\cos^2$ etc...

$P_{|x_2|}$ est une probabilité de présence dans la chambre, fonction des variables propres de l'expérience, de la position de l'évènement etc...

Sa forme mathématique nous est inconnue mais nous admettons que son existence n'empêche pas la détection des événements, ce que nous écrivons :

$$\int P_{x_2} dx_2 = 1$$

$P_{|x_1||x_2|}$ est la probabilité de détection de l'évènement telle qu'elle a été calculée au chapitre IV. Elle est fonction des variables cinématiques et des variables de position, et sa forme mathématique est parfaitement connue. Par contre étant toujours inférieure à un, elle empêche la détection de certains événements, ce qui peut créer des erreurs systématiques dans les résultats. Dans l'espace des variables x_1 et x_2 nous définissons la quantité

$$\eta = \sum_n \delta | \zeta_n - x_1 | \delta | \zeta_n - x_2 | \quad (31)$$

et nous écrivons que la probabilité d'avoir des événements dans l'état $x_1 x_2$ est

$$\eta_{x_1 x_2} = r | x_1 x_2 a | \quad (32)$$

Cette fonction r , nous l'avons vu, se présente comme le produit de trois fonctions

$$r_{|x_1 x_2 a|} = r_{|x_1 a|} P_{|x_2|} P_{|x_1 x_2|} \quad (33)$$

1) Calcul de $\bar{U}_1$

Si nous remplaçons ces valeurs de η et de r dans l'expression de U (formule 17) nous pouvons contrôler la cohérence de nos hypothèses en vérifiant que l'espérance mathématique de U est nulle

$$\bar{U}_1 = \int \left(\frac{\eta}{r} - 1 \right) \frac{\delta r}{\delta a_1} dx_1 dx_2 = \int (\bar{\eta} - r) \frac{1}{n_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} dx_2 dx_2 \quad (34)$$

Théoriquement $\bar{U}_1 = 0$ puisque $\bar{\eta} = r$, mais comme nous ne connaissons pas l'expression mathématique de $p_{|x_2|}$ nous devons la remplacer par une fonction approchée p' , ainsi la fonction r calculée sera légèrement différente de la fonction théorique et dans ces conditions nous n'aurons jamais $U_1 = 0$. Pour vérifier la validité de cette approximation, remplaçons dans la formule η par la fonction théorique $r_p \cdot p \cdot P$ (formule 23) et r par la fonction approchée $r_p \cdot p' \cdot P$

$$\bar{U}_1 = \int (p - p') P \frac{\delta r_p}{\delta a_1} dx_1 dx_2$$

$\bar{U}_1$ est différent de zéro dans le cas général, si la statistique augmente $\bar{U}_1$ croît linéairement avec N par l'intermédiaire de $\frac{\delta r_1}{\delta a_1}$ et nous avons vu que la matrice $\bar{H}^{-1}$ décroît linéairement en $\frac{1}{N}$. Dans ces conditions l'écart attendu

$$\bar{\Delta} = \bar{H}^{-1} \bar{U}$$

est indépendant de N et ne tend pas vers zéro quand la statistique augmente. Nous ne pouvons atteindre ainsi la valeur théorique des paramètres. C'est par définition une erreur systématique et ce formalisme ne convient pas. Pour obtenir rigoureusement $U_1 = 0$ il faut éliminer $p_{|x_2|}$ de la formule en utilisant sa propriété d'être normalisée.

$$\bar{U}_1 = \int \frac{dx_1}{r_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} \int [\bar{\eta} - r_p \cdot P \cdot P] dx_2$$

Pour intégrer seulement $p_{|x_2|}$ par rapport à x_2 il faut sortir $P_{|x_1 x_2|}$ du crochet et le remplacer par une formule approchée fonction seulement des variables x_1 , soit $f(x_1)$, que nous pouvons mettre devant l'intégrale en x_2 .

$$\bar{U}_1 = \int \frac{dx_1}{r_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} f(x_1) \left[\int \frac{\bar{\eta}}{P} dx_2 - r_p \right] \quad (35)$$

Nous obtenons rigoureusement $\bar{U}_1 = 0$ si

$$\int \frac{\bar{\eta}}{P} dx_2 = r_p$$

ce qui s'écrit
$$\int \sum_n \frac{1}{P_{x_1 x_2}} \delta(\zeta_n - x_1) \delta(\zeta_n - x_2) dx_2 = r_p$$

soit par 33

$$\sum_n \frac{1}{P_{x_1 x_2}} \delta(\zeta_n - x_1) = r_p$$

2) Poids d'un événement

Définissons le poids d'un événement comme l'inverse de sa probabilité de détection

$$\Omega_{x_1 x_2} = \frac{1}{P_{|x_1 x_2|}} \quad (36)$$

La relation précédente devient:

$$\sum_n \Omega_{x_1 x_2} \delta(\zeta_n - x_1) = r_p$$

Ceci signifie que la probabilité physique r_p est égale dans chaque bande d'histogramme à l'espérance mathématique de la somme des poids des événements de la bande, ou, ce qui est équivalent, que nous devons définir la hauteur des histogrammes comme la somme des poids au lieu de la somme des événements.

Nous définissons la hauteur de l'histogramme par

$$\eta_p = \sum_n \Omega \delta |\zeta_n - x_1| \quad (37)$$

et nous avons la relation

$$\bar{\eta}_p = r_p$$

Nous pouvons maintenant développer le formalisme des évènements avec poids selon le même schéma que le précédent.

En particulier le vecteur U en fonction de ces nouvelles quantités s'écrit :

$$U_1 = \int \frac{1}{r_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} (\eta_p - r_p) f(x_1) dx_1$$

3) Calcul de $\overline{\eta_p \eta_{p'}}$ et de $\sigma_{\eta_p}^2$

$$\begin{aligned} \overline{\eta_p \eta_{p'}} &= \int dx_2 \eta \frac{1}{P} \int dx'_2 \eta' \frac{1}{P'} \\ &= \int dx_2 dx'_2 \frac{1}{P P'} \overline{\eta \eta'} \end{aligned}$$

et en utilisant les résultats de 27.

$$\begin{aligned} \overline{\eta_p \eta_{p'}} &= \int \frac{dx_2 dx'_2}{P P'} \left[r_p \cdot P \cdot P' r_{p'} \cdot P' P' \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \right] \\ &= r_p r_{p'} + r_p \delta(x_1 - x'_1) \int dx_2 \frac{P}{P} \end{aligned} \quad (39)$$

Posons σ_x^2 égale à la dernière intégrale

$$\int \frac{P}{P} dx_2 = \sigma_x^2 \quad (40)$$

Nous obtenons :

$$\overline{\eta_p \eta_{p'}} = r_p r_{p'} + r_p \delta(x - x') \sigma_x^2 \quad (41)$$

et en remplaçant r_p par $\bar{\eta}_p$

$$\sigma_{\eta_p}^2 = r_p \delta(x - x') \sigma_x^2 \quad (42)$$

L'affectation d'un poids à chaque évènement revient à multiplier la variance de η_p par σ_x^2 , donc tous les termes de la matrice d'erreur par cette valeur.

4) Fonction $f(x_1)$

Pour la cohérence du formalisme, nous devons relier entre elles les quantités nouvelles $f(x_1)$ et σ_x^2

Essayons de retrouver : $\overline{U} \cdot \tilde{U} = \bar{H}$

La seule différence pour la matrice $\bar{H}$ est l'introduction de la fonction $f(x_1)$ dans U , donc :

$$\bar{H} = \int f(x_1) \frac{1}{r_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} \frac{\delta r_p}{\delta a_1}$$

Dans le calcul de la matrice $\overline{U\tilde{U}}$ (formule 26) nous avons maintenant le produit $f(x_1) f(x_1')$ en facteur

$$\overline{U\tilde{U}} = \int dx_1 dx_1' \frac{f(x_1) f(x_1')}{r_{px_1} r_{px_1'}} \sigma^2 \frac{\delta r_{px_1}}{\eta_p} \frac{\delta r_{px_1}}{\delta a_1}$$

En remplaçant $\sigma_{\eta_p}^2$ par son expression, il reste

$$\overline{U\tilde{U}} = \int f^2(x_1) \sigma_x^2 \frac{1}{r_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} dx_1$$

Nous avons la condition

$$\overline{U\tilde{U}} = \bar{H} \text{ si } f(x_1) = \frac{1}{\sigma_x^2}$$

De $\overline{U\tilde{U}} = \bar{H}$ nous déduisons facilement que

$$W^2 = \bar{H}^{-1}$$

On peut démontrer que cette condition rend la matrice W^2 minimum et que par conséquent elle est la meilleure possible.

La méthode rigoureuse, mais longue, consiste à obtenir le vecteur $|U\rangle$ et la matrice H par un calcul direct des paramètres $|\alpha\rangle$ et de comparer leurs expressions aux formules précédemment obtenues.

5) Fonction caractéristique

La définition précédente de U équivaut à introduire une fonction E telle que :

$$E = \sum_n \frac{\Omega}{\sigma_x^2} \text{Log } r_p - \int \frac{r_p}{\sigma_x^2} dx$$

et il est facile de démontrer que les conditions pour obtenir le maximum de E conduisent aux mêmes équations en $|\alpha\rangle$ que les calculs précédents.

En résumé pour ajuster nos paramètres, nous devons construire le vecteur

$$U = \int \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{1}{r_p} (\eta_p - r_p) \frac{\delta r_p}{\delta a_1} dx \quad (43)$$

la matrice

$$\bar{H} = \int \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{1}{r_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} \quad (44)$$

et résoudre par itération le système $U_\alpha = 0$, ce qui conduit à

$$|\alpha| = \alpha_0 + \bar{H}^{-1} |U_{\alpha_0}| \quad (45)$$

La précision de la détermination des paramètres est donnée par la matrice :

$$W^2 = \bar{H}^{-1} \quad (46)$$

VI - METHODE DE CALCUL

1) Formalisme pratique

Soit x_k l'abscisse du milieu de la bande n° (k) de l'histogramme ($0 < k < K$). Nous calculons $|U|$ et $\bar{H}$ définis par les formules (43) et (44) en remplaçant l'intégration sur tout le domaine x par une sommation sur les bandes k , ce qui nous donne :

$$U_1 = \sum_k \frac{1}{\sigma_x^2} \left(\frac{\eta_p}{r_p} - 1 \right) \frac{\delta r}{\delta a_1} \quad (47)$$

Et :

$$\bar{H}_{11} = \sum_k \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{1}{r_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} \quad (48)$$

La difficulté est d'évaluer correctement dans chaque bande d'histogramme la quantité σ_x^2 .

2) Evaluation de σ_x^2 .

a) Expression théorique.

Nous avons défini par la formule : $\sigma_x^2 = \int \frac{dx_2 p}{p}$

Divisons la par $\int p \cdot dx_2 = \int p \cdot \frac{p}{p} dx_2 = 1$

et multiplions par $\frac{p r_p}{p r_p}$ sous l'intégrale, il vient :

$$\sigma_x^2 = \frac{\int \frac{p r_p p}{p^2 r_p} dx_2}{\int p \frac{p}{p} dx_2}$$

r_p étant indépendant de x_2 nous pouvons le sortir de l'intégrale numérateur,

le rentrer dans l'intégrale dénominateur, et remplaçons r_p, p_2^p par r , nous obtenons la relation

$$\sigma_x^2 = \frac{\int \frac{r}{p^2} dx_2}{\int \frac{r}{p} dx_2} = \frac{\sum \bar{\Omega}^2}{\sum \bar{\Omega}} \quad (49)$$

qui signifie que l'expression rigoureuse de σ_x^2 est le rapport de l'espérance mathématique de la somme des carrés des poids à l'espérance mathématique de la somme des poids.

b) Expression calculable

σ_x^2 a été introduit lors du calcul de $\sigma_{\eta_p}^2$ pour relier facilement les deux formalismes avec ou sans poids. Sans faire intervenir σ_x^2 , il est possible de calculer complètement $\sigma_{\eta_p}^2$ en reprenant à la formule 39.

$$\overline{\eta_p \eta_p'} = \int \frac{dx_2}{p} \frac{dx_2'}{p'} \left[r_p \cdot p \cdot p' \cdot r_p' \cdot p' + r_p \cdot p \cdot P \delta(x - x_1') \delta(x - x_2') \right]$$

que nous pouvons écrire :

$$\overline{\eta_p \eta_p'} = r_p r_p' + \int \frac{dx_2}{p} \frac{dx_2'}{p'} r_p \cdot p \cdot P \cdot \delta(x - x_1') \delta(x - x_2')$$

Donc :

$$\sigma_{\eta_p}^2 = \int dx \frac{1}{p^2} r_p \cdot p \cdot P \delta(x - x')$$

Cette intégrale est l'espérance mathématique de la somme des carrés des poids des événements du domaine x (d'une bande d'histogramme).

$$\sigma_{\eta_p}^2 = \sum \bar{\Omega}^2 \quad (50)$$

Si nous multiplions haut et bas par $\bar{\eta}_p = \sum \bar{\Omega} = r_p$ nous retrouvons la formule 41

$$\sigma_{\eta_p}^2 = r_p \frac{\sum \bar{\Omega}^2}{\sum \bar{\Omega}} = r_p \cdot \sigma_x^2 \quad (51)$$

Pour obtenir une expression approchée convenable de σ_x^2 nous allons d'abord chercher une approximation de $\sigma_{\eta_p}^2$.

Ecrivons que $\sigma_{\eta_p}^2$ (formule 50) est égal à la somme des carrés des poids, nous obtenons une expression :

$$\sigma_{\eta_p}^2 = \sum \Omega^2$$

qui, si tous les poids sont égaux à 1, a pour limite.

$$\sigma_{\eta_p}^2 = \sum \Omega = \eta_p$$

Cette valeur ne convient pas, car nous devons retrouver le résultat classique.

$$\sigma_{\eta_p}^2 = \bar{\eta}_p$$

- Pour cela, remplaçons dans la formule 51, les espérances mathématiques de $\Sigma \Omega^2$ et de $\Sigma \Omega$ par ces nombres eux-mêmes

$$\sigma_{\eta_p}^2 = r_p \frac{\Sigma \Omega^2}{\Sigma \Omega} \quad (52)$$

Cette formule, si tous les poids sont égaux à 1, nous donne bien le résultat attendu :

$$\sigma_{\eta_p}^2 = \Sigma \bar{\Omega}$$

- Comparons maintenant les variances des deux fonctions aléatoires en présence :

$$S = \Sigma \Omega^2 \quad \text{et} \quad S' = r_p \frac{\Sigma \Omega^2}{\Sigma \Omega}$$

et pour le faire, posons :

$$S' = S (1 + \epsilon) \quad \text{avec} \quad \epsilon = \frac{r_p}{\eta_p} - 1$$

La variance de S' s'écrit :

$$\sigma_{S'}^2 = \overline{S'^2} - \bar{S'}^2$$

Soit en fonction de S :

$$\begin{aligned} \sigma_{S'}^2 &= \overline{S^2 (1 + \epsilon)^2} - \overline{S (1 + \epsilon)}^2 \\ &= \overline{S^2} - \bar{S}^2 + 2 (\overline{\epsilon S^2} - \overline{\epsilon S S}) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes représentant σ_S^2 . Pour interpréter le crochet revenons à la définition de ϵ , nous obtenons :

$$\overline{\epsilon S^2} - \overline{\epsilon S S} = \frac{(\bar{\eta}_p - \eta_p)}{\eta_p} \overline{S^2} - \frac{(\bar{\eta}_p - \eta_p)}{\eta_p} \bar{S} \bar{S}$$

La valeur limite de ceci, quand tous les poids sont égaux à un ($S = \eta_p$) est :

$$= \bar{\eta}_p^2 - \eta_p^2 = -\sigma_{\eta_p}^2$$

Cette quantité est négative et nous admettons qu'elle le reste quand les poids sont légèrement supérieurs à l'unité :

- Nous voyons ainsi qu'il est préférable de conserver l'approximation S' de préférence à S , d'abord parce que son espérance mathématique limite est correcte, ensuite parce que sa variance est inférieure à celle de S .

- Nous en déduisons l'approximation de σ_x^2 .

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum \Omega^2}{\sum \Omega} \quad (53)$$

VII - METHODE DU CHI CARRE

1) Définitions

Nous traiterons dans ce chapitre le problème des statistiques sans poids, l'introduction des poids revenant à changer les notations η en η_p , r en r_p et à introduire σ_x^2 dans les calculs de U et $\bar{H}$.

Si η_k est la hauteur de la bande d'histogramme d'abscisse x_k (chapitre IV formule 15) pour les valeurs théoriques des paramètres nous avons :

$$\bar{\eta}_k = r|_x| |a|$$

Construisons la matrice d'erreur en η

$$V^2 = (\eta - \bar{\eta}) \overbrace{(\eta - \bar{\eta})}$$

Nous définissons le chi carré comme le nombre :

$$\chi^2 = (\eta - \bar{\eta}) V^{-2} (\eta - \bar{\eta}) \quad (54)$$

La formule (28) définit V^{-2}

$$V^{-2} = \frac{1}{r|_x| a|} \delta(x - x') \quad (55)$$

Pratiquement, après optimisation, le χ^2 se calculera par la formule

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(\eta - r)^2}{r} \quad (56)$$

2) Propriétés du χ^2

Rappelons que si après optimisation nous obtenons l'équation de la courbe théorique $y = r|_{x_k}| |a|$, la probabilité d'avoir expérimentalement l'histogramme η_{x_k} au lieu de cette courbe est :

$$P = \frac{1}{\text{NORME}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

Pour un découpage en K bandes et pour une fonction $r|_x| |a|$ à L paramètres l'espérance mathématique de χ^2 est :

$$\chi^2 = K - L$$

et son écart standard :

$$\Delta \chi^2 = \sqrt{2(K-L)}$$

Si les évènements sont affectés d'un poids supérieur à 1, il faut prendre la méthode de calcul du chapitre IV pour optimiser les paramètres, et pour calculer le χ^2 le seul changement est dans la matrice V^{-2} qui est définie par (42) au lieu de (28).

donc :

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(\eta - r)^2}{\sigma^2_r} \quad (57)$$

la valeur de χ^2 nous permet de chiffrer, après optimisation, la probabilité d'obtenir nos résultats expérimentaux en supposons que la formule $y = r|_x||a|$ représente les phénomènes physiques étudiés.

3) Nouvelle méthode de χ^2

Si le test au χ^2 nous permet de chiffrer, après optimisation courbe à un histogramme, il est en général insuffisant pour permettre un choix entre plusieurs hypothèses possibles qui conduisent à des courbes voisines.

En effet pour ajuster les paramètres, nous avons intérêt à faire un petit découpage, donc la valeur attendue du χ^2 : $\overline{\chi^2} = K \cdot L$ peut être grande (entre 20 et 50 par exemple) et les fluctuations statistiques, qui augmentent le χ^2 , peuvent masquer les variations de χ^2 dues aux différences de formulation mathématique.

Pour palier cet inconvénient, au lieu de définir le χ^2 à partir des fluctuations des $|\eta|$ définissons le à partir des fluctuations des paramètres $|\alpha|$. Si nous connaissons les valeurs de ces paramètres pour une hypothèse, la probabilité d'obtenir pour ces paramètres des valeurs mesurées α au lieu des valeurs attendues $|\alpha|_{hyp}$ est :

$$P = \frac{1}{NORME} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

à condition de définir le χ^2 par une formule analogue à (54) transposée en α

$$\chi^2 = \widetilde{(\alpha - \bar{\alpha}_{hyp})} W^{-2} (\alpha - \bar{\alpha}_{hyp})$$

soit :

$$\chi^2 = \widetilde{\Delta} W^{-2} \Delta$$

ce qui, en exprimant W^2 et Δ en fonction de $\bar{H}$ et de U devient :

$$\chi^2 = \widetilde{\Delta} \bar{H} \Delta$$

ou

$$\chi^2 = \widetilde{U} \bar{H}^{-1} U \quad (58)$$

Parmi les L paramètres $|a|$ de la formule, supposons qu'il en existe M , que nous appellerons les paramètres $|c|$ qui soient parfaitement déterminés dans le cadre d'une hypothèse et soit $|c_0|$ le vecteur ainsi défini numériquement.

Appelons $|b|$ les $L-M$ autres paramètres à ajuster du vecteur $|a|$

Sinon séparons les rôles des paramètres $|b|$ et $|c|$ nous obtenons les expressions:

$$|a| = \begin{vmatrix} b \\ c \end{vmatrix} \quad |U| = \begin{vmatrix} U_b \\ U_c \end{vmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{H}_a & \bar{H}_{bc} \\ \bar{H}_{bc} & \bar{H}_c \end{vmatrix} \quad \bar{H}^{-1} = \begin{vmatrix} \bar{H}_a^{-1} & \bar{H}_{bc}^{-1} \\ \bar{H}_{bc}^{-1} & \bar{H}_c^{-1} \end{vmatrix}$$

Supposons d'abord que l'hypothèse soit vraie.

Les seuls paramètres variables sont les $|b|$ le vecteur $|a|$ devient

$$|a| = \begin{vmatrix} b \\ c_o \end{vmatrix}$$

et au bout de quelques iterations le calcul doit donner:

$$|U_\beta| = 0$$

Les paramètres $|b|$ ayant été déterminés dans cette hypothèse et soit $|b_o|$ le résultat, nous allons étudier la validité de l'hypothèse en fixant les paramètres $|b|$ à leurs valeurs optima b_o et en laissant les paramètres $|c|$ libres.

Nous obtiendrons le vecteur $|\gamma|$ des valeurs optima de $|c|$ quand

$$\text{et les } \Delta c \quad \text{par:} \quad \begin{vmatrix} \Delta b \\ \Delta c \end{vmatrix} = \bar{H} \begin{vmatrix} 0 \\ U_{|c_o|} \end{vmatrix}$$

ce qui se réduit ici à

$$\Delta c = \bar{H}_c U_{|c_o|}$$

Nous calculerons le χ^2 de ce test par la formule (58)

$$\chi^2 = \begin{vmatrix} \tilde{U}_\beta \\ U_{c_o} \end{vmatrix} \bar{H}^{-1} \begin{vmatrix} U_\beta \\ U_{c_o} \end{vmatrix}$$

ceci se simplifie puisque $U_\beta = 0$ en

$$\chi^2 = |\tilde{U}_{c_o}| \bar{H}_c^{-1} |U_{c_o}|$$

Pratiquement, après avoir optimisé les paramètres $|b|$ en $|\beta_o|$ nous pouvons faire un seul tour d'itération en laissant tous les paramètres libres en leur donnant les valeurs initiales $|\beta_o|$ et $|c_o|$

Nous obtenons un nouveau vecteur de paramètres

$$\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_0 \\ \gamma_0 \end{vmatrix} + \bar{H}^{-1} \begin{vmatrix} U_{\beta_0} \\ U_{\gamma_0} \end{vmatrix}$$

D'après les valeurs de β_0 : $U_{\beta_0} = 0$

$$\text{donc: } \begin{vmatrix} \Delta b \\ \Delta c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta - \beta_0 \\ \gamma - \gamma_0 \end{vmatrix} = \bar{H}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ U_{\gamma_0} \end{vmatrix}$$

et le chi carré de ce test s'écrit

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \begin{vmatrix} \Delta b \\ \Delta c \end{vmatrix}^T H \begin{vmatrix} \Delta b \\ \Delta c \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 \\ U_{\gamma_0} \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} \bar{H}^{-1} \bar{H} \bar{H}^{-1} & 0 \\ 0 & U_{\gamma_0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ U_{\gamma_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ U_{\gamma_0} \end{vmatrix}^T \bar{H}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ U_{\gamma_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{\gamma_0} \end{vmatrix}^T \bar{H}^{-1} \begin{vmatrix} U_{\gamma_0} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

formule identique à (59).

L'avantage de cette méthode est que le χ^2 n'est calculé qu'à partir des variations des paramètres caractéristiques de l'hypothèse, sa valeur attendue est M, nombre qui est toujours faible (1 à 4 en général) son écart standard est $\sqrt{2M}$ et sa valeur numérique ne dépend que des fluctuations statistiques qui agissent sur les paramètres C caractéristiques de l'hypothèse.

VIII - METHODE DE CALCUL

1) Formules à programmer

Pour chaque bande d'histogramme nous possédons, sur carte perforée les informations suivantes: η_p la somme des poids dans la bande, x_k l'abscisse du milieu σ_x^2 défini par 53 et éventuellement les autres constantes s'y reliant (aire de l'élément d'espace de phase normalisée etc...).

Nous nous fixons une formule mathématique $y = r_p |x| |a|$

et nous choisissons un premier lot de valeurs de paramètres $|\alpha_0|$. Pour chaque valeur de x_k , et pour les valeurs $|\alpha_0|$ le programme calcule d'abord $r_p x_k |\alpha_0|$ puis les quantités $\frac{\delta r_p}{\delta a_1} (x_k | \alpha_0|)$ par la formule des accroissements finis

$$\frac{\delta r_p}{\delta a_1} = \frac{r_p x_k (\alpha_0 + \epsilon) - r_p x_k |\alpha_0|}{\epsilon}$$

avec l'ensemble des résultats il construit le vecteur:

$$U_1 = \sum_k \frac{1}{\sigma_x^2} \left(\frac{\eta_p}{r_p (x_k \alpha_0)} - 1 \right) \frac{\delta r_p}{\delta a_1} x_k |\alpha_0|$$

et la matrice:

$$\bar{H}_{11} = \sum_k \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{1}{r_p} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} \frac{\delta r_p}{\delta a_1} (x_k | \alpha_0|)$$

Nous en déduisons des valeurs plus probables des paramètres

$$|\alpha_1| = |\alpha_0| + \bar{H}^{-1} U |\alpha_0|$$

valeurs que nous entrons dans l'itération suivante. Le programme s'arrête lorsque le vecteur $|\Delta| = |\alpha_j| - |\alpha_{j-1}|$ est égal à un vecteur de contraintes imposé à l'avance, en général de l'ordre du millièème de la valeur initiale du vecteur $|\alpha_0|$. En fin d'itération nous extrayons les matrices $\bar{H}$ et $\bar{H}^{-1}$, la matrice $\bar{H}^{-1}$ nous donnant la précision de la détermination de nos paramètres par

$$|\Delta \bar{\alpha}_1| = \sqrt{\bar{H}^{-1}_{11}}, \quad (60)$$

2) Utilisation du programme

Ce programme, écrit en langage machine pour le Calculateur Gamma Tambour suit rigoureusement la méthode de calcul.

Il est indépendant de l'histogramme et de la formulation mathématique et fonctionne pour une formule du type: $y_x = r \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} a$

r peut dépendre de 6 variables $|x|$, de 12 paramètres $|\alpha|$ et l'histogramme peut comporter 60 bandes.

Pour introduire la formule $y = r|x| |a|$ il suffit de la programmer en langage pseudo symbolique, de générer, et de changer la dernière carte, ce qui transforme ce programme en sous programme du programme principal

Technique des invariants ¹³

1) Définitions et Notations

Soit (K^+) le quadrivecteur énergie-impulsion du K^+ incident dans un système quelconque et de même: (P_i) , (K^0) , (π) , (P_f) les quadrivecteurs des autres particules de la réaction (les symboles p_i , p_f sont relatifs au proton incident et proton final).

Par définition le produit scalaire, (AB) dans un espace pseudo-euclidien des deux quadrivecteurs (A) et (B) est: $(AB) = E_A E_B - \vec{p}_A \vec{p}_B$ (1)

Ceci conduit à écrire le produit d'un vecteur par lui-même comme :

$$(K^+)^2 = E_{K^+}^2 - p_{K^+}^2 = m_{K^+}^2 \quad (2)$$

et de même: $(p_i)^2 = (p_f)^2 = m_p^2$

Le carré de la masse d'un système de deux particules (masse de la résonance) est d'après cette définition :

$$\begin{aligned} M_{AB}^2 &= (A + B)^2 \\ &= A^2 + B^2 + 2(AB) \\ &= (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

2) Propriétés

a) le produit scalaire ainsi défini est invariant.

α) par translation de Lorentz le long d'un axe Ox.

β) par rotation :

- une rotation ne change pas la valeur des énergies.

- elle ne change pas non plus le produit scalaire spatial $\vec{p}_A \vec{p}_B$ qui est un scalaire.

Donc (AB) est invariant par rapport à une transformation quelconque.

b) Matrice construite avec des invariants

Par convention nous affecterons les quadrivecteurs des particules entrantes du signe - et ceux des particules sortantes du signe +.

La conservation énergie-impulsion implique que la somme de ces quadrivecteurs est nulle.

$$-K^+ - p_i + K^0 + \pi + p_f = 0$$

Si nous multiplions scalairement chaque vecteur par le vecteur (K^+) , puis par p_i , K^0 , π , p_f nous aurons en définitive la matrice suivante:

K^{+2}	$K^+ p_i$	$- K^+ K^0$	$- K^+ \pi$	$- K^+ p_f$
$p_i K^+$ (3)	p_i^2	$- p_i K^0$	$- p_i \pi$	$- p_i p_f$
$- K^0 K^+$	$- K^0 p_i$	K^0^2	$K^0 \pi$	$K^0 p_f$
$- \pi K^+$	$- \pi p_i$	πK^0 (1)	π^2	πp_f
$- p_f K^+$	$- p_f p_i$	$p_f K^0$	$p_f \pi$	p_f^2

Le nombre d'invariants construits est $C_5^2 = 10$ mais comme la somme des termes de chaque ligne est nulle, ceci ne laisse que 5 invariants indépendants.

c) Relation entre les trois masses carrés des résonances :

La somme des termes d'une colonne est nulle, donc la somme des termes de la région 1 est égale au signe près à la somme des termes de la région 2. La même remarque étant valable pour (2) et (3) la somme des termes de (3) est égale à la somme des termes de (1) soit:

$$K^{+2} + p^2 + 2(K^+ p_i) = K^0^2 + \pi^2 + p^2 + 2(K^0 \pi) + 2(\pi p_f) + 2(K^0 p_f) \quad (4)$$

ajoutons $K^0^2 + \pi^2 + p^2$ aux deux membres de l'égalité, nous obtenons une relation entre les masses carrées des résonances possibles

$$M^2_{(K^+, p_i)} + \pi^2 + K^0^2 + p^2 = M^2_{(\pi p)} + M^2_{(K p)} + M^2_{(K \pi)} \quad (5)$$

3) Utilisation de la matrice

On peut obtenir les énergies, les impulsions et les angles entre deux particules à partir de la matrice des invariants. A titre d'exemple, nous calculons ici l'angle entre les particules A et B dans le centre de masse du groupement CD.

$$(AB) = E_A E_B - p_A p_B \cos \theta_{AB} \text{ (voir relation 1)}$$

On peut écrire

$$A(C + D) = E_A (E_C + E_D) - p_A (p_C + p_D) \quad (5)$$

$$\text{L'égalité } p_C + p_D = 0 \quad (\text{s. c. m. de CD})$$

permet de ramener (5) à la forme

$$(AC) + (AD) = E_A (E_C + E_D) \quad (6)$$

qui explicite E_A ; nous aurions de même E_B .

Il reste à calculer la quantité $E_C + E_D$, que nous obtenons par la relation :

$$(C + D)^2 = (E_C + E_D)^2 = C^2 + D^2 + 2 CD$$

Toutes les énergies étant calculables à partir des invariants, il en est de même des impulsions et de $\cos \theta$ (AB).

Comme application démontrons que $M^2(\pi K)$ est linéaire en $\cos \theta_{\pi K}$ dans le système du c.m. du N^* (Nous verrons que le $\cos \theta$ dont il est question ici est égal à $-\cos \lambda$ de la méthode de conjugaison). La masse carrée $K\pi$ est linéaire en fonction du produit (K_{π}) (formule 3)

$$M_{K\pi}^2 = K^2 + \pi^2 + 2 (K\pi)$$

et
$$(K\pi) = E_K \cdot E_{\pi} - p_K \cdot p_{\pi} \cos \theta_{K\pi}$$

en appliquant les relations précédentes (6) et (7) nous obtenons :

$$(K \circ \pi) + (KP) = E_{K \circ} \cdot (E_{\pi} + E_p) \quad (8)$$

$$\pi^2 + (\pi p) = E_{\pi} \cdot (E_{\pi} + E_p)$$

$$\pi^2 + p^2 + 2 (\pi p) = (E_{\pi} + E_p)^2$$

Donc $E_{\pi} + E_p$ est indépendant de (K_{π}) , E_{π} aussi, quant à $E_{K \circ}$ il suffit de remplacer le premier membre de (8) par son expression tirée de (4) pour le relier au seul produit (p_{π}) .

Nous voyons que pour un produit (p_{π}) donné tous les termes sont indépendants de $(K\pi)$. Il en résulte que $\cos \theta$ est linéaire en $(K\pi)$ donc en $M_{(K\pi)}^2$.

Méthode pour reconstituer une résonance pure

Nous avons démontré en annexe III que $M_{K\pi}^2$ est linéaire en $\cos \lambda$ pour $M^2_{\pi p}$ déterminé.

λ est l'angle du méson π et de la direction opposée au K^0 dans le centre de masse du N^* . Si nous admettons que le N^* se désintègre avec une parité déterminée, dans son centre de masse, l'intensité d'émission du méson π dans une direction, et du proton dans la direction opposée, est égale à l'intensité de ces deux particules lorsqu'on les inverse. Cette opération d'inversion change $\cos \lambda$ en $-\cos \lambda$, ne change pas $M^2_{\pi p}$ mais change $M^2_{K\pi}$ qui est linéaire en $\cos \lambda$.

Rappelons que $\cos \lambda = +1$ correspond à la limite inférieure de l'ellipse $\cos \lambda = 0$ exactement au milieu et $\cos \lambda = -1$ à la limite supérieure.

Pour un évènement donné, situé dans le bas de l'ellipse, si nous faisons cette opération de conjugaison, nous créons un évènement artificiel dans le haut de l'ellipse, et pour une étude de la résonance πp nous pouvons supprimer toute la zone de la résonance $K\pi$ et la remplacer par des évènements artificiels dont les $M^2_{K\pi}$ vraies sont dans le bas de l'ellipse.

On se rend facilement compte que cette méthode n'est applicable que si la zone gênante ne dépasse pas $\cos \lambda = 0$, ce qui dans notre expérience est le cas pour le N^* , mais non pour le K^* .

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur Francis Perrin de m'avoir accueilli en son laboratoire et je lui exprime toute ma gratitude pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour ses encouragements tout au long de cette expérience.

De l'ensemble de la participation du Laboratoire, je tiens à mettre en valeur le rôle prépondérant de M. Philippe Eberhard pour la direction de l'expérience et je lui suis très reconnaissant d'avoir assuré ma formation durant ces années passées dans son groupe.

Je remercie Monsieur Moch, Sous-Directeur du Laboratoire, d'avoir toujours suivi mon travail avec attention et de nous avoir apporté son aide financière et administrative.

Je réunis dans le même remerciement tous ceux qui ont contribué à la réussite de l'expérience en particulier Madame Lévy, les physiciens invités : Messieurs D. Berley, E. Boldt, V. Henri, M. Pripstein, mes camarades N.H. Duong, R. George, J. Poyen ; notre technicien si efficace Monsieur P. Courty, qui a maintenu un appareillage difficile en bon fonctionnement, notre groupe de dépouillement et d'analyse et Mlle M.O. Giraud qui a dactylographié ce manuscrit.

De l'aide importante reçue du Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, je souligne celle de M. le Professeur Berthelot à qui j'adresse mes remerciements pour s'être intéressé à l'expérience et avoir mis à notre disposition la chambre à bulles de 35 cm du Laboratoire de Physique Corpusculaire de Hautes Energies.

Je remercie bien sincèrement Messieurs J. Crussard et A. Tran pour leur participation à l'expérience ; ainsi que les ingénieurs du département Saturne sous la direction de Messieurs Maillet, Levy Mandel et Lefrère pour la bonne marche de la machine et du faisceau, Messieurs Prugne et Pacchioni pour l'excellent fonctionnement de la chambre, Monsieur Calmels et son groupe pour le dépouillement des clichés.

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

"Résultats récents de l'étude de l'interaction $\bar{p} p$ ".

Vu et approuvé :

Paris, le 2 Décembre 1963

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE

SAMACETA - 92, rue de Richelieu

PARIS 2^e

